LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DE POLYNOMES

A UNE VARIABLE COMPLEXE.

A LA MÊME LIBRAIRIE

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL,

PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par M. ÉMILE BOREL; 1898 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par M. ÉMILE BOREL; 1900 ..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par M. ÉMILE BOREL; 1901 ..... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *R. d'Adhemar*; 1902 .. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *Ludovic Zoretti*; 1903 .. 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1904. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *Maurice Fréchet*, avec des Notes de M. PAUL PAINLEVÉ et de M. HENRI LEBESGUE; 1905 .... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par M. RENÉ BAIRE, rédigées par M. *A. Denjoy*; 1905 ...... 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par M. ERNST LINDELÖF; 1905 .... 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1906 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, professées au Collège de France par M. PIERRE BOUTROUX, avec une Note de M. PAUL PAINLEVÉ; 1908 .... 6 fr. 50

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par M. OTTO BLUMENTHAL, 1910 .... 5 fr. 50

Leçons sur la théorie de la croissance, par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *A. Denjoy*, 1910 .... 5 fr. 50

SOUS PRESSE :

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par M. LUDOVIC ZORETTI.

EN PRÉPARATION

Sur l'inversion des intégrales définies, par M. VITO VOLTERRA.

Les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues, par M. FRÉDÉRIC RIESZ.

Leçons sur quelques questions d'*Analysis situs*, par M. HENRI LEBESGUE.

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par M. PIERRE COUSIN.

Leçons sur les correspondances entre variables réelles, par M. JULES DRACH.

Leçons sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et son application à la théorie des nombres premiers, par M. HELGE VON KOCH.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DE POLYNOMES

A UNE VARIABLE COMPLEXE;

PAR

Paul MONTEL,
Docteur ès Sciences,
Professeur au Lycée Buffon.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

PRÉFACE.

Je me suis proposé, dans ce petit Volume, d'exposer les principes sur lesquels reposent les méthodes de développement des fonctions d'une variable complexe en séries de polynomes. Me conformant à la règle adoptée dans cette Collection, je l'ai écrit de manière à le rendre accessible à des lecteurs possédant seulement les premières notions de l'Analyse et j'ai rappelé au début les parties essentielles de la théorie des fonctions analytiques utilisées dans les pages suivantes, en apportant à leur exposé les éclaircissements et les compléments nécessaires.

Pour la rédaction, j'ai eu constamment recours aux Mémoires originaux : les méthodes du texte ne sont pas toujours les mêmes que celles de ces Mémoires, et cela est bien naturel parce que, les différentes parties d'un Livre se prêtant un mutuel appui, l'une peut servir à éclaircir et à simplifier l'autre.

Le problème le plus simple, celui de la représentation d'une fonction analytique par la somme d'une série de polynomes, dans un domaine où cette fonction est régulière, a été traité par diverses méthodes. J'ai cru devoir les exposer à cause de leur élégance et de l'intérêt que présentent les principes, utiles dans d'autres recherches, sur lesquels elles sont fondées. Un lien rattache toutes ces méthodes : c'est l'intégrale de Cauchy; elles ne diffèrent que par les procédés de calcul et d'approximation indéfinie de cette intégrale.

J'ai consacré tout un Chapitre aux travaux de M. Faber, dont les résultats constituent une généralisation importante des séries de Taylor : à chaque domaine correspond une famille de polynomes qui ne dépendent que de la forme de ce domaine et toute fonction régulière dans le domaine peut être représentée par la somme d'une série formée avec les polynomes de la famille.

L'étude de la représentation d'une fonction par une série de polynomes, convergente dans son étoile d'holomorphie, n'a pas été abordée ici : les belles méthodes de M. Painlevé unissent en effet le domaine réel et le domaine complexe, et leur auteur les a exposées dans une Note contenue dans le Livre de M. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, à laquelle je renvoie le lecteur.

Je suis heureux de remercier ici M. Émile Borel qui m'a engagé à écrire ce Livre et m'a aidé de ses conseils au cours de la rédaction. La lecture des épreuves a fourni à M. Henri Lebesgue l'occasion de remarques importantes et d'indications judicieuses qui m'ont été fort utiles : je tiens à lui en exprimer mon affectueuse gratitude.

PAUL MONTEL.

Paris, le 5 juillet 1910.

Dans la Préface de mes *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, j'avais annoncé mon intention de consacrer un Volume aux séries de polynomes à variables complexes; j'ai retardé tout d'abord la rédaction de ce Volume pour tenir compte des recherches que M. Paul Montel était précisément en train de terminer, et il m'a semblé ensuite que l'importance même de ses travaux sur ce sujet difficile désignait particulièrement M. Montel pour le traiter à ma place; j'espère que les lecteurs de la Collection lui seront aussi reconnaissants que moi d'avoir bien voulu écrire ce Livre.

ÉMILE BOREL.

INDEX.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DE POLYNOMES

A UNE VARIABLE COMPLEXE.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Domaines et ensembles de points.

Un plan étant rapporté à deux axes $O\xi$, $O\eta$, considérons la courbe C

$$\xi = f(t), \qquad \eta = \varphi(t);$$

les fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$ sont définies et continues dans un intervalle qu'on peut toujours supposer être $(0, 1)$, et deux valeurs distinctes de t donnent deux points différents, sauf les valeurs 0 et 1, qui donnent le même point. La courbe C est dite *fermée*, sans point multiple; elle partage le plan en deux régions : l'une, intérieure, dont aucun point ne peut être joint au point à l'infini par un trait continu sans rencontrer C; l'autre, extérieure, dont chaque point peut être uni au point à l'infini par un trait continu sans point commun avec C (¹).

Nous appellerons *domaine simplement connexe* la région intérieure d'une courbe fermée C sans point multiple; plus précisément, l'ensemble des points de la région intérieure s'appellera

---

(¹) Pour la démonstration, *voir* JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, 2ᵉ édition, p. 97-104.

M.

un *domaine ouvert*, et l'ensemble de points formé par la réunion des points intérieurs et de ceux de la courbe frontière C sera un *domaine fermé*. Dans un pareil domaine, on peut joindre un point intérieur à un autre, par un trait continu ne rencontrant pas la frontière C, et deux courbes quelconques unissant les deux points peuvent se déduire l'une de l'autre par une déformation continue, sans sortir du domaine fermé (1).

Soient D un domaine simplement connexe et D_1, D_2, ..., D_p des domaines simplement connexes tous intérieurs à D et extérieurs les uns aux autres. Les points du domaine D qui n'appartiennent à aucun des domaines D_1, D_2, ..., D_p formeront une région D' qu'on appellera *domaine multiplement connexe d'ordre* $p+1$. Les points du domaine ouvert D, qui n'appartiennent pas aux domaines fermés D_1, D_2, ..., D_p formeront le domaine ouvert D'; les points du domaine fermé D qui n'appartiennent pas aux domaines ouverts D_1, D_2, ..., D_p formeront le domaine fermé D'. Deux points intérieurs de D peuvent être réunis par un trait continu ne rencontrant pas la frontière C, C_1, C_2, ..., C_p, mais deux chemins quelconques unissant ces deux points ne pourront pas toujours se ramener l'un à l'autre par une déformation continue (2).

Il importe aussi de préciser la nature des courbes limitant les domaines que nous aurons à utiliser : appelons *simple* un arc de courbe sans point multiple et tel que les fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ qui définissent ses coordonnées possèdent des dérivées premières continues; nous dirons qu'un contour fermé est *simple* lorsqu'il est formé d'un nombre fini d'arcs de courbe simples; un contour

(1) On dit qu'une déformation continue unit les deux courbes

$\Gamma_0[\xi = f(t), \eta = \varphi(t), (0 \leq t \leq 1)]$ et $\Gamma_1[\xi = f_1(t), \eta = \varphi_1(t), (0 \leq t \leq 1)]$,

lorsqu'on a défini des fonctions $F(t, \alpha)$ et $\Phi(t, \alpha)$ continues pour $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ telles que

$$F(t, 0) = f(t), \qquad F(t, 1) = f_1(t),$$
$$\Phi(t, 0) = \varphi(t), \qquad \Phi(t, 1) = \varphi_1(t).$$

La courbe $\Gamma_\alpha[\xi = F(t, \alpha), \eta = \Phi(t, \alpha) \ (0 \leq t \leq 1)]$, obtenue en laissant α constant dans les fonctions F et Φ se déforme et passe de Γ_0 à Γ_1 lorsque α varie de 0 à 1.

(2) La région extérieure définie par une courbe C est aussi un domaine simplement connexe Δ; si l'on en supprime les points des domaines D_1, D_2, ..., D_p séparés et contenus dans cette région, on obtient un domaine connexe Δ' d'ordre $p+1$. Les domaines D et D' sont dits *bornés* et les domaines Δ et Δ' *non bornés*.

polygonal, par exemple, est un contour simple. Un arc simple a une longueur déterminée et finie. Un arc de courbe sera dit *analytique* au point P, correspondant à la valeur t_0 du paramètre si les fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont développables en séries de Taylor convergentes dans le voisinage de t_0; le point P est dit *régulier* si les nombres $f'(t_0)$ et $\varphi'(t_0)$ ne sont pas nuls tous les deux. un arc dont tous les points sont réguliers est appelé *arc régulier*. En particulier, un contour fermé peut être formé par un seul arc de courbe analytique et régulier; c'est le cas d'un cercle ou d'une ellipse.

Supposons qu'on ait choisi un sens de parcours sur un des contours simples C qui forment la frontière d'un domaine; si le mobile qui parcourt C a le domaine à sa gauche dans une de ses positions, il en sera de même pour toutes les positions de ce mobile ([1]). Nous appellerons *positif* le sens de parcours sur C d'un mobile qui laisse le domaine à sa gauche; *négatif* le sens contraire.

Rappelons maintenant quelques définitions et quelques propriétés fondamentales des ensembles de points dans le plan :

Soit E un ensemble de points situés dans un plan, un point P du plan est appelé *point limite* de cet ensemble, s'il existe des points de E à une distance de P aussi petite qu'on le veut : en d'autres termes, dans un cercle quelconque de centre P, il y a une infinité de points de l'ensemble. Si P est le point à l'infini, on dit que c'est un point limite de l'ensemble, lorsqu'il y a des points de E à l'extérieur de tout cercle du plan. Un ensemble formé d'un nombre fini de points n'a pas de point limite; au contraire, si un ensemble contient une infinité de points, il possède au moins un point limite. En effet, ou bien, quelque grand que soit un cercle, il y a des points de E à l'extérieur et le point à l'infini est un point limite, ou bien il existe un cercle contenant tous les points de E ([2]). Soit A un carré contenant ce cercle, divisons-le en quatre carrés égaux par des parallèles aux côtés, dans l'un de ces carrés au moins, soit A_1, il y a une infinité de points de E, divisons de même A_1 en quatre carrés égaux, dans l'un d'eux, A_2, il y a une infinité de points de E, etc., on obtient ainsi une suite infinie de carrés $A, A_1, \ldots, A_p, \ldots$ dont chacun est emboîté dans le pré-

---

([1]) *Voir* BAIRE, *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, t. I, p. 220.

([2]) On dit dans ce cas que l'ensemble E est borné.

cédent et qui ont, par suite, au moins un point P commun; on voit immédiatement que P est un point limite.

L'ensemble E' des points limites est appelé l'*ensemble dérivé* de l'ensemble E; si tous les points de E' appartiennent à E, on dit que E est un ensemble *fermé* (¹); si les ensembles E et E' sont identiques, on dit que E est un ensemble *parfait*. On définit de même l'ensemble E'' dérivé de E', etc. Un ensemble est *dénombrable* lorsqu'on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre les points de cet ensemble et les nombres entiers; par exemple l'ensemble des points dont les deux coordonnées sont rationnelles est dénombrable. Si l'ensemble dérivé E' d'un ensemble E se compose d'un nombre fini de points, l'ensemble E est dénombrable; il en est de même lorsque l'un des dérivés de E ne comprend qu'un nombre fini de points.

Un ensemble fermé est formé par la réunion d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable (²).

Un point d'un ensemble E est appelé *point intérieur de l'ensemble*, s'il existe un cercle dont le centre est en ce point et dont tous les points appartiennent à E; il est *extérieur* s'il existe un cercle ayant ce point pour centre et ne contenant aucun point de E. Tous les points voisins d'un point intérieur sont intérieurs; tous les points voisins d'un point extérieur sont extérieurs. Les points qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs forment la *frontière* de E. Dans tout cercle dont le centre est en un point frontière, il y a des points qui appartiennent à E et des points qui ne lui appartiennent pas (³).

Un ensemble E, contenu dans un domaine D, est dit *dense* dans ce domaine, s'il existe des points de E dans toute région, si petite soit-elle du domaine : l'ensemble des points dont les deux coor-

---

(¹) Par exemple, l'ensemble E' est fermé, car un point limite de E' a dans son voisinage une infinité de points de E' et, par conséquent, une infinité de points de E; donc il appartient à E'.

(²) Ce théorème est dû à M. Cantor et à M. Bendixson; pour sa démonstration comme pour celles des propriétés générales des ensembles que nous rappelons ici, on pourra consulter les *Leçons sur la théorie des fonctions* et les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. Borel et les *Leçons sur l'intégration* de M. Lebesgue.

(³) Si l'on appelle E l'ensemble des points d'un domaine ouvert ou fermé, la courbe limitant ce domaine est la frontière de E.

données sont rationnelles est dense dans tout le plan. Lorsqu'un ensemble E est dense dans le domaine D, l'ensemble E' comprend évidemment tous les points du domaine fermé D; si E est fermé, il coïncide avec D.

Si un ensemble n'est dense dans aucune région d'un domaine, il est dit *non dense* dans ce domaine : un ensemble fermé qui n'a pas de points intérieurs est partout non dense (¹); si un ensemble non dense est donné, dans chaque région du plan il y a un domaine ne contenant aucun point de l'ensemble.

On dit qu'un ensemble est *superficiel* s'il contient des points intérieurs : un domaine est un ensemble superficiel; si tous les points de l'ensemble sont des points frontières, on dit que l'ensemble est *linéaire;* une courbe, au sens ordinaire de ce mot, est un ensemble linéaire.

Soit E un ensemble parfait borné, M. Cantor dit que cet ensemble est *bien enchaîné* (zusammenhängend) ou *continu* si, étant donnés deux points M et M' de E, on peut trouver une ligne polygonale, ayant ses extrémités en M et M', dont les sommets sont des points de E et dont chaque côté a une longueur qui ne dépasse pas un nombre ε arbitrairement petit. S'il existe dans l'ensemble un couple de points ne satisfaisant pas à cette condition, l'ensemble est *mal enchaîné* ou *discontinu*. Si la condition n'est remplie par aucun couple de points, on dira que l'ensemble est *partout discontinu*. Un ensemble partout discontinu ne contient pas de points intérieurs, c'est un ensemble linéaire (²).

Je vais maintenant démontrer, au sujet des ensembles parfaits discontinus, un théorème que nous aurons à utiliser :

Soit E *un ensemble borné, parfait et discontinu; on peut*

(¹) Considérons par exemple un carré, partageons-le en 9 carrés égaux par des parallèles aux côtés, et supprimons-en les points du carré ouvert concentrique au premier. Répétons cette opération pour chacun des 8 carrés restants et continuons indéfiniment. Les points qui n'ont pas été enlevés forment un ensemble parfait et non dense.

(²) Plaçons sur deux côtés adjacents d'un carré deux ensembles de points F et F_1 parfaits et non denses, ensembles qu'on obtient, comme on sait, en retranchant d'un segment les points intérieurs à une infinité de segments sans point commun deux à deux. L'ensemble des points du carré qui se projettent sur les deux côtés considérés aux points de F et de F_1 forment un ensemble parfait, évidemment discontinu.

tracer une courbe entourant un point quelconque P de E, dont aucun point n'appartient à l'ensemble et qui est tout entière contenue dans un cercle de centre P et de rayon arbitrairement petit.

Soit σ le rayon du cercle qui doit contenir la courbe; traçons un autre cercle γ de centre P et de rayon $\sigma_1 < \sigma$. Les points de E situés à l'extérieur et sur la circonférence de γ forment un ensemble fermé E_1. Si P_1 est un point de E_1, il existe un nombre ε tel qu'on ne peut tracer de ligne polygonale unissant P et P_1 dont les sommets soient des points de E et les côtés inférieurs à ε, puisque l'ensemble est partout discontinu. Les nombres ε relatifs aux différents points P_1 de E_1 ont un minimum η. Je dis que η n'est pas nul : s'il était nul, en effet, on trouverait des points P_1, P_2, ..., P_n, ... de E_1 tels que les nombres ε correspondants prennent les valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ dont la suite a pour limite o. Appelons P_0 un point limite des P_i. P_0 appartient à E_1 qui est fermé, et il correspond à ce point un nombre ε_0 non nul; il en résulte que pour tous les points de E_1 situés à une distance de P_0 inférieure à ε_0, la valeur de ε est au moins égale à ε_0, ce qui contredit l'hypothèse qu'il y a dans le voisinage de P_0 des points P_i pour lesquels la valeur de ε est aussi petite qu'on le veut.

Traçons maintenant autour de chaque point de E un cercle de rayon $\eta' < \frac{\eta}{2}$ ayant ce point pour centre : d'après un théorème de M. Borel, généralisé par M. Lebesgue (¹), on peut remplacer ces cercles par un nombre fini d'entre eux, de manière que chaque point de E soit à l'intérieur de l'un au moins des cercles qu'on

(¹) Voici l'énoncé du théorème général, en nous plaçant, par exemple, dans l'espace à deux dimensions :

Soient E un ensemble de points fermé et borné et T un ensemble de cercles tels que tout point de E soit intérieur à l'un au moins de ces cercles (il faut entendre par là que le point appartient au domaine ouvert formé par les points intérieurs au cercle), *on peut remplacer l'ensemble T par un nombre fini p de cercles de cet ensemble tels que tout point de E soit à l'intérieur de l'un au moins de ces p cercles.*

Nous appellerons dans la suite, cette proposition : *le théorème de Borel Lebesgue;* ses applications à la théorie des fonctions sont fréquentes et utiles, pour la démonstration voir les *Leçons sur l'intégration* de M. Lebesgue, p. 105, et les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. Borel, p. 9.

aura retenus. Les points communs à ces derniers cercles forment un ou plusieurs domaines simplement ou multiplement connexes dont l'un, Δ, contient P. Ce domaine Δ ne contient aucun des cercles relatifs aux points de E_1, car, dans le cas contraire, on pourrait relier P à un point de E_1 par une ligne polygonale dont les sommets appartiendraient à E et les côtés seraient au plus égaux à $2\eta' < \eta$. Par conséquent Δ est à l'intérieur d'un cercle de centre P et de rayon $\alpha_1 + \eta' < \alpha$, si η' est assez petit. La courbe δ limitant extérieurement Δ répond à la question; elle est formée d'un nombre fini d'arcs de cercle.

On peut généraliser la proposition précédente et l'étendre au cas où E n'est pas partout discontinu [1]. Soit F un ensemble contenu dans E et tel que tout ensemble contenant F et contenu dans E soit discontinu; je dis qu'on peut entourer F d'une ligne δ ne contenant aucun point de E et dont chaque point est à une distance inférieure à α d'un point de F. Si l'on décrit un cercle de rayon $\alpha_1 < \alpha$ autour de chaque point de F pris comme centre, on pourra, en prenant un nombre fini de ces cercles, enfermer F dans un domaine dont la frontière γ sera formée d'arcs de cercle et jouera le même rôle que le cercle γ du théorème précédent. A chaque point P de F correspond un nombre η, minimum des longueurs des côtés des lignes polygonales qui unissent le point P aux différents points P_1 de E non intérieurs à γ et dont les sommets sont des points de E. Les nombres η relatifs aux différents points de F ont un minimum ζ non nul. (On le démontre de la même manière que pour η.) Il suffit de raisonner sur ζ, comme on l'a fait plus haut sur η, pour obtenir un domaine Δ et une courbe δ répondant à la question [2].

---

(1) *Voir* ZORETTI, *Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers* (*Journal de Liouville*, 1905, p. 10).

(2) On peut remplacer la courbe δ par une infinité d'autres; en effet, chaque point de δ est le centre d'un cercle ρ ne contenant aucun point de E, sinon ce point ayant une infinité de points de E dans son voisinage serait point limite de E et appartiendrait à E qui est fermé. Traçons un cercle ρ autour de chacun des points de δ, on peut, d'après le théorème Borel-Lebesgue, remplacer ces cercles par un nombre fini d'entre eux; les points communs aux cercles ainsi retenus forment un canal autour de δ qui ne contient pas de point de E; toute courbe fermée tracée dans ce canal et entourant F répond à la question, on peut la supposer analytique et régulière, par exemple.

Fonctions analytiques.

Je rappelle brièvement les propriétés fondamentales des fonctions analytiques. Soit $f(x)$ une fonction de la variable complexe

$$x = \xi + i\eta,$$

définie dans un domaine D. Supposons que, en chaque point intérieur de D, le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ait une limite finie lorsque le nombre complexe h tend vers zéro: cette limite est la dérivée de la fonction $f(x)$ au point x. La fonction $f(x)$ est alors une fonction *holomorphe* de x dans le domaine D.

Soit L un arc ou chemin simple allant du point x_0 au point X et la somme

$$\sum_0^n (x_{i+1}-x_i)f(x_i), \qquad x_{n+1} = \mathrm{X},$$

dans laquelle les points x_1, x_2, ..., x_n sont placés sur L, les indices indiquant l'ordre dans lequel on rencontre ces points en se déplaçant sur L de x_0 à X. Cette somme a une limite lorsque le nombre des points de division choisis sur L augmente indéfiniment, de manière que la distance de deux points consécutifs ait pour limite zéro. Cette limite est l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx;$$

cette intégrale conserve la même valeur si l'on remplace le chemin L par un autre chemin L' tel que la fonction $f(x)$ soit holomorphe en tous les points rencontrés dans une déformation continue permettant de passer de L à L'. La valeur de l'intégrale est une fonction de X, F(X) holomorphe comme $f(\mathrm{X})$ et admettant comme dérivée au point X la valeur $f(\mathrm{X})$.

Soit C un contour simple limitant un domaine fermé simple-

ment connexe dans lequel $f(x)$ est holomorphe; l'intégrale

$$\int_{C_i} f(x)\,dx$$

est nulle, d'après ce qui précède. De même, si la frontière C du domaine D est composée des courbes simples $C_1, C_2, \ldots, C_p$, et si l'on pose

$$\int_C f(x)\,dx = \int_{C_1} f(x)\,dx + \int_{C_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{C_p} f(x)\,dx,$$

on a

$$\int_C f(x)\,dx = 0;$$

l'intégrale étant prise sur chaque contour C_i parcouru dans le sens positif (1).

On déduit de là la formule fondamentale de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

l'intégrale est étendue au contour total C et prise dans le sens positif. C'est cette formule qui jouera un rôle essentiel dans les Chapitres suivants. Lorsqu'une fonction $f(z)$, continue sur C, est donnée, la formule de Cauchy définit une fonction holomorphe à l'intérieur de C.

Remarquons tout de suite que la valeur du second membre est zéro, lorsque le point x est à l'extérieur de D : nous rencontrons ainsi dès le début de la théorie des fonctions analytiques, une

---

(1) Il suffit, pour l'exactitude du théorème, que $f(x)$ soit holomorphe dans le domaine ouvert et continue dans le domaine fermé. En effet, s'il en est ainsi, remplaçons chaque contour C_i par un contour voisin C'_i, voisin de C_i et intérieur au domaine; nous obtiendrons une nouvelle frontière C' remplaçant C et pour laquelle on a évidemment $\int_{C'} f(x)\,dx = 0$. Or chaque terme $\int_{C'_i} f(x)\,dx$ peut être rendu aussi voisin qu'on veut du terme $\int_{C_i} f(x)\,dx$, donc $\int_{C'} f(x)\,dx$ peut être rendu aussi voisin qu'on veut de $\int_C f(x)\,dx$. Il en résulte que $\int_C f(x)\,dx = 0$.

expression analytique qui représente deux fonctions holomorphes différentes $f(x)$ et zéro dans deux domaines différents; cette remarque sera pour nous très importante.

On déduit de la formule de Cauchy l'expression

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $f(x)$, en sorte que l'existence des dérivées de tous les ordres pour la fonction $f(x)$ est une conséquence de l'existence de la dérivée première. Si M est une limite supérieure du module de $f(z)$ dans D et R la distance du point x à la frontière C, la formule précédente conduit à l'inégalité fondamentale

$$\left|\frac{f_n(x)}{n!}\right| < \frac{M}{R^n}.$$

Soit a un point du domaine ouvert D et R la distance de ce point à la frontière C; on déduit de la formule de Cauchy le développement en série de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \ldots,$$

valable pour tous les points intérieurs au cercle de centre a et de rayon R. Il résulte de l'inégalité rappelée plus haut que les modules des coefficients des puissances de $x-a$ dans cette série sont inférieurs aux coefficients du développement de la fonction

$$\frac{M}{1 - \dfrac{x-a}{R}}$$

en série de Taylor.

Plus généralement, si une fonction $f(x)$ est holomorphe dans une couronne circulaire de centre a, on peut la représenter par le développement de Laurent

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(x-a)^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (x-a)^n;$$

A_n et B_n sont des constantes; en particulier, si $f(x)$ est holomorphe dans un cercle de centre a, sauf au point a, le développement est valable dans tout le cercle, sauf au point a.

Points singuliers. — Si une fonction $f(x)$ cesse d'être holomorphe en un point a, ce point est appelé un *point singulier* de la fonction; les points de la région dans laquelle $f(x)$ est holomorphe sont les *points réguliers* : chaque point régulier est le centre d'un cercle dans lequel la fonction est holomorphe. Un point singulier a est *isolé* si, dans un cercle de centre a, il n'y a pas d'autre point singulier. On peut, dans ce cas, développer $f(x)$ en série de Laurent, autour du point a; la partie du développement qui contient les puissances négatives de $x-a$ s'appelle la *partie principale* du point singulier. Si cette partie principale contient un nombre fini p de termes, on a

$$f(x) = \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{B_p}{(x-a)^p} + \mathfrak{P}(x-a),$$

$\mathfrak{P}(x-a)$ désignant une série entière en $x-a$, et le point a est un *pôle d'ordre* p. Le module de f augmente indéfiniment lorsque x tend vers a, mais le produit $(x-a)^p f(x)$ tend vers une limite finie. La fonction $\frac{1}{f}$ est régulière au point a, qui est pour elle un zéro d'ordre p. Une fonction qui n'a, dans un domaine fermé, d'autres points singuliers que des pôles est dite *méromorphe* dans ce domaine; le nombre des pôles est limité, sinon ces points auraient un point limite qui serait nécessairement singulier et ne pourrait être un pôle, puisque, d'après sa définition même, un pôle est un point singulier isolé.

Si les termes à exposants négatifs sont en nombre illimité, on a un *point essentiel isolé*. L'indétermination de la fonction est complète autour de ce point, la fonction s'approche autant qu'on le veut de tout nombre donné fini ou infini; il y a plus, on doit à M. Picard la proposition suivante : *Soit a un point singulier essentiel isolé* (¹), *la fonction $f(x)$ prend une infinité de fois dans tout cercle de centre a, toute valeur finie ou infinie sauf deux valeurs exceptionnelles au plus.* Si a est un point essentiel pour f, c'est un point essentiel pour $\frac{1}{f}$.

(¹) Il suffit que a ne soit pas point limite de points singuliers essentiels mais il peut y avoir une infinité de pôles dans le voisinage de a; il s'agit, bien entendu, d'une fonction $f(x)$ qui a, en chaque point autour de a, une valeur déterminée et est holomorphe sauf en a et aux pôles.

Les points singuliers non isolés peuvent former des ensembles parfaits quelconques, comprendre des lignes (coupures), des portions du plan (espaces lacunaires).

Enfin, pour étudier la fonction $f(x)$ au point à l'infini, lorsque cette fonction est définie pour des valeurs de x voisines de ce point, on pose $x = \frac{1}{x'}$, et on étudie la fonction $f\left(\frac{1}{x'}\right)$, dans le voisinage de zéro. Le point à l'infini est, par exemple, un pôle ou un point essentiel isolé pour $f(x)$, si le point o est un pôle ou un point essentiel isolé pour $f\left(\frac{1}{x'}\right)$.

Résidus. — Soit a un point singulier isolé, et γ une circonférence de centre a, ne contenant aucun autre point singulier de $f(x)$; on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(x)\,dx = B_1,$$

B_1 étant le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans la série de Laurent [1]. Ce nombre B_1 est le *résidu* de la fonction $f(x)$ relatif au point a.

Supposons que la fonction $f(x)$ n'ait qu'un nombre fini de points singuliers à l'intérieur du domaine D, limité par la courbe C; on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(x)\,dx = \sum B_1,$$

la somme du second membre est étendue aux résidus des points singuliers contenus dans D; cette formule constitue le théorème des résidus.

Prolongement analytique. — En un point a où une fonction est holomorphe, on peut représenter cette fonction par la somme d'une série entière $\mathfrak{P}(x-a)$; cette série converge à l'intérieur d'un cercle γ de centre a. Soit b un point intérieur de ce cercle, on peut représenter la fonction par la somme d'une série entière $\mathfrak{P}(x-b)$ qui est certainement convergente dans le cercle de centre b, tangent à γ intérieurement, mais cette série peut con-

---

[1] Lorsque le sens d'intégration n'est pas indiqué, c'est qu'il s'agit du sens positif.

verger en des points extérieurs à ce cercle; soit γ_1 le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-b)$, si γ_1 contient des points extérieurs à γ, on pourra en choisir un c, situé à l'intérieur de γ_1 et définir une nouvelle série entière $\mathfrak{P}(x-c)$, etc. On peut calculer ainsi de proche en proche la valeur de $f(x)$ en chacun des points qu'on peut atteindre par ce procédé qu'on appelle le *prolongement analytique*. Si une fonction est holomorphe dans un domaine D, on pourra ainsi, en partant de l'un des points du domaine, atteindre tous les autres ([1]). C'est cette remarque qui est le point de départ de la notion de fonction analytique au sens de Weierstrass et de M. Méray.

Soit $\mathfrak{P}(x-a)$ une série dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini, et soit Δ l'ensemble des points du plan qu'on peut atteindre par le prolongement analytique, la fonction $f(x)$ ainsi définie dans la région Δ sera appelée une *fonction analytique* et nous dirons que Δ est le domaine naturel d'existence de cette fonction; $\mathfrak{P}(x-a)$ est un *élément* de cette fonction analytique. La fonction est uniforme si, quel que soit le chemin tracé dans Δ et allant de a à x, on obtient toujours la même valeur pour $f(x)$; elle est *multiforme* dans le cas contraire. Si deux chemins différents conduisent à des valeurs différentes de $f(x)$, la fonction n'est pas holomorphe dans le domaine limité par ces deux chemins; ce domaine contient des points singuliers : s'il y a un point singulier unique, on l'appelle un point *critique*. L'ensemble Δ est d'un seul tenant d'après sa définition même; les points frontières de Δ sont les points singuliers de la fonction. Si la fonction est uniforme, l'ensemble de ces points singuliers est fermé. En effet, soit P_0 un point limite de points singuliers; si ce point était régulier, la fonction $f(z)$ serait holomorphe dans un cercle de centre P_0, et il n'y aurait pas de point singulier dans le voisinage de P_0.

([1]) En effet, partons de a et traçons une courbe simple située dans le domaine ouvert D et allant du point a au point x. Les rayons de convergence relatifs aux différents points de la ligne ont un minimum positif qui est égal au minimum de la distance d'un point de la courbe à la frontière de D. Les cercles de convergence, relatifs à chaque point de la courbe, ayant des rayons supérieurs à un nombre fixe, cela suffit pour affirmer qu'on ira de a en x par un nombre fini d'opérations.

On appelle *expression analytique* toute expression composée à partir de la variable x et de constantes par des additions, des multiplications, des divisions et des passages à la limite, effectués un nombre fini ou dénombrable de fois [1]. Un problème important d'analyse est celui de l'étude des rapports entre les fonctions analytiques et les expressions analytiques. Dans la suite, nous nous occuperons, à peu près exclusivement, des rapports qui existent entre une fonction analytique et l'expression analytique particulière constituée par une série convergente de polynomes en x.

Représentation conforme. — Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un domaine d; faisons correspondre à chaque point x de d le point X défini par l'égalité

$$X = f(x).$$

Lorsque x parcourt d, X parcourt une portion du plan D qui peut se recouvrir : cette correspondance conserve les angles. Soient d et D deux domaines; s'il existe une fonction holomorphe $f(x)$ qui, à chaque point x de d, fait correspondre un point X de D et réciproquement à chaque point X de D fait correspondre un point x unique de d, on dit qu'on a effectué une *représentation conforme* des domaines d et D l'un sur l'autre; dans ce cas, la fonction inverse de $f(x)$,

$$x = \varphi(X),$$

est holomorphe dans D.

La représentation conforme de d sur D n'est pas possible en général dans le cas où les deux domaines sont limités par un même nombre de contours; mais on peut toujours effectuer une représentation conforme pour deux domaines d et D, simplement connexes, ou deux domaines d et D, limités chacun par deux contours.

Soit d un domaine simplement connexe limité par le contour C; il existe une fonction $f(x)$, holomorphe dans d, qui représente le domaine d sur un cercle arbitraire γ, de manière que le centre du cercle corresponde à un point arbitrairement choisi dans

[1] L'intégration définie, la sommation des séries, et même la division peuvent être considérées comme des passages à la limite.

l'intérieur de d et que, à un point de la circonférence de γ corresponde un point arbitrairement choisi sur C. Enfin, si la courbe C est formée d'un seul arc de courbe régulier et analytique, la fonction $f(x)$ est holomorphe dans un domaine d', comprenant d à son intérieur; ce domaine d' peut être représenté sur un cercle γ' concentrique et extérieur à γ [1]. Deux domaines d et D, simplement connexes, peuvent être représentés d'une manière conforme l'un sur l'autre, puisqu'on peut représenter chacun d'eux sur le cercle γ.

Les séries de fonctions analytiques.

Soient $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$, ... des fonctions holomorphes dans un domaine D en chaque point duquel la série

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

est convergente et a pour somme $f(x)$. La suite formée par les sommes de 1, 2, 3, ..., n, ... termes de cette série est une suite de fonctions holomorphes dans D,

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots,$$
$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),$$

et cette suite a pour limite $f(x)$; nous dirons que c'est une suite convergente.

Les deux notions de série convergente et de suite convergente se ramènent immédiatement l'un à l'autre; si l'on donne la série $u_n(x)$, la suite des $f_n(x)$ est aussitôt formée; réciproquement, si l'on se donne la suite des $f_n(x)$, il lui correspond la série

$$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \ldots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \ldots.$$

Nous emploierons donc indifféremment les deux expressions de série et de suite.

Nous dirons que la convergence est *uniforme* dans un domaine D, pour la série ou la suite, lorsque à chaque nombre

---

(1) Pour la démonstration, *voir* par exemple le *Cours d'Analyse* de M. Picard, t. II, 2e édition, p. 301.

positif ε correspond un entier p, tel que pour $n > p$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

quel que soit x dans D; en d'autres termes, le reste de la série a un module inférieur à ε, lorsqu'on prend plus de p termes dans la série et ce résultat ne dépend pas de la position de x [1].

On doit à Weierstrass le théorème fondamental suivant :

Si une série de fonctions holomorphes dans un domaine fermé D *converge uniformément sur le contour simple* C *limitant ce domaine, elle converge uniformément dans le domaine fermé et la somme de cette série est une fonction holomorphe dans le domaine ouvert.*

Étant donné ε, on peut trouver p tel que pour $n > p$ on ait

$$|f_{n+q}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

pour tout point z du contour, puisque la série converge uniformément sur C; or, si x est dans D, on a

$$|f_{n+q}(x) - f_n(x)| \leqq |f_{n+q}(z) - f_n(z)| < \varepsilon,$$

car le maximum du module d'une fonction holomorphe dans un

---

[1] On dit que la convergence est *uniforme simple* si à chaque nombre ε on peut faire correspondre *un* nombre n pour lequel l'inégalité ait lieu. La convergence uniforme simple suffit pour la démonstration de la plupart des théorèmes qui suivent. On peut d'ailleurs facilement ramener ce second cas au premier. En effet, au nombre $\frac{1}{p}$ (p entier), correspond un nombre n_p tel que

$$|f(x) - f_{n_p}(x)| < \frac{1}{p},$$

et l'on peut supposer que les n_p ne décroissent pas, lorsque p croît, du moins si aucune des fonctions $f_n(x)$ n'est identique à $f(x)$; la suite

$$f_{n_1}(x), \quad f_{n_2}(x), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(x), \quad \ldots,$$

converge uniformément dans D vers la limite $f(x)$, c'est une suite extraite de la suite $f_n(x)$; on l'obtient en remplaçant la série proposée par une nouvelle série obtenue en groupant les n_1 premiers termes, les $n_2 - n_1$ suivants, etc. Donc, si une série possède la convergence uniforme simple, il suffit de grouper convenablement des termes consécutifs pour la transformer en une série dont la convergence est uniforme au sens habituel.

domaine est atteint en un point du contour (¹); il résulte de là que la série converge uniformément dans le domaine fermé D, vers une fonction $f(x)$. Soit D_1 un domaine intérieur à D et limité par une courbe C_1 sans point commun avec C; la plus courte distance de C et de C_1 sera un nombre positif δ. On a dans D_1

$$f_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f_n(z)\,dz}{z-x}.$$

Soit $\varphi(x)$ la fonction holomorphe dans D_1 représentée par

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

on a

$$\varphi(x) - f_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{[f(z)-f_n(z)]}{z-x}\,dz;$$

or, pour $n > p$, on a

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon,$$

et, x étant dans le domaine D_1, le module de $z - x$ n'est pas inférieur à δ, donc

$$|\varphi(x) - f_n(x)| < \frac{L\varepsilon}{2\pi\delta} \qquad \text{pour} \qquad n > p,$$

L désignant la longueur de C_1; donc $f_n(x)$ a pour limite $\varphi(x)$, c'est-à-dire que $f(x) = \varphi(x)$ est analytique dans D_1.

On peut ajouter que les séries formées par les dérivées de même ordre des termes de la première convergent uniformément dans le domaine ouvert D et ont pour sommes les dérivées correspondantes de la fonction $f(x)$ (²).

Il suffit évidemment de démontrer que $f^{(h)}(x)$ est la limite

(¹) Soit, en effet, $F(x)$ une fonction holomorphe dans le domaine fermé D dont la frontière est C; la partie réelle de la fonction $\log F(x)$ est $\log|F(x)|$ qui est une fonction harmonique et continue dans le domaine D' obtenu en excluant de D les points intérieurs à des cercles dont les centres sont les zéros de $F(x)$ et les rayons arbitrairement petits. Le maximum de cette fonction harmonique a lieu en un point de la frontière de D' qui sera certainement un point de C si les rayons des cercles sont assez voisins de zéro. Le module de $F(x)$ sera maximum au même point.

(²) Par l'expression *converger uniformément dans un domaine ouvert* D, nous entendons converger uniformément dans tout domaine D_1 intérieur à D.

de $f_n^{(k)}(x)$ lorsque n croît indéfiniment; or

$$f^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(x) = \frac{k!}{2i\pi}\int_{C_1} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz,$$

et, par suite,

$$|f^k(x) - f_n^k(x)| < \frac{k!\,\varepsilon L}{2\pi\delta^{k+1}} \qquad \text{pour} \qquad n > p;$$

donc $f^k(x) - f_n^k(x)$ tend uniformément vers zéro dans D_1.

Nous démontrerons la proposition plus générale suivante : *Si une série de fonctions holomorphes dans un domaine ouvert* D *et continues dans le domaine fermé* D, *converge sur le contour* C *qui limite le domaine et si les modules des sommes $f_n(z)$ restent, quel que soit n, bornés sur ce contour, la série converge uniformément dans le domaine ouvert* D *et a, par conséquent, pour somme une fonction holomorphe.*

La démonstration repose sur l'extension au domaine complexe d'un théorème de M. Lebesgue. Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ une suite de fonctions intégrables et bornées sur un arc de courbe simple c et convergeant vers une fonction $f(z)$ sur cet arc, la fonction $f(z)$ est intégrable sur c et l'on a

$$\int_c f(z)\,dz = \lim_{n=\infty} \int_c f_n(z)\,dz \quad (^1).$$

---

(1) Soient $\xi(s)$ et $\eta(s)$ les expressions des coordonnées d'un point de la courbe c en fonction de la longueur s de l'arc, supposons que ce point (ξ, η) décrive c lorsque s varie de zéro à l, soit encore

$$f_n(z) = P_n(\xi, \eta) + i Q_n(\xi, \eta),$$

les P_n et Q_n sont bornés en valeur absolue comme $|f_n(z)|$ et ont des limites $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$. Or

$$\int_c f_n(z)\,dz = \int_0^l \left(P_n \frac{d\xi}{ds} - Q_n \frac{d\eta}{ds}\right) ds + i \int_0^l \left(P_n \frac{d\eta}{ds} + Q_n \frac{d\xi}{ds}\right) ds,$$

les P_n et Q_n sont bornés en valeur absolue; d'autre part $\left|\frac{d\xi}{ds}\right|$ et $\left|\frac{d\eta}{ds}\right|$ ne dépassent pas 1, donc les fonctions placées sous le signe $\int$, au second membre, sont bornées, quel que soit n, en module et ont respectivement pour limites

$$P\frac{d\xi}{ds} - Q\frac{d\eta}{ds} \qquad \text{et} \qquad P\frac{d\eta}{ds} + Q\frac{d\xi}{ds}.$$

Les intégrales ont donc pour limites les intégrales des fonctions limites (H. Lebesgue,

Appliquons ce résultat aux fonctions $\frac{f_n(z)}{z-x}$, où $f_n(z)$ est la fonction définie dans l'énoncé; x est situé dans D_1, limité par le contour C_1; les $f_n(z)$ sont bornés sur C, donc dans D, et comme $|z-x|>\delta$ les quotients $\frac{f_n(z)}{z-x}$ sont bornés dans D_1; donc on a, si $f(z)$ est la limite de $f_n(z)$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f_n(z)\,dz}{z-x}=\lim_{n=\infty}f_n(x),$$

donc la suite $f_n(x)$ est convergente dans D_1 et la fonction limite

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

est holomorphe dans D_1.

Lorsque des fonctions $f_n(x)$ convergent sur le contour C sans que leurs modules soient bornés dans leur ensemble, le résultat n'est plus exact : on peut, par exemple, construire une suite de polynomes en x, convergeant sur C sans converger à l'intérieur; on peut, par contre, construire une suite de polynomes convergeant dans D et sur C sans que ces polynomes soient bornés sur C (¹). On ne connaît pas les conditions auxquelles doit être assujettie la convergence d'une suite $f_n(x)$ sur C pour entraîner la convergence dans D.

Leçons sur l'intégration, p. 114)

$$\int_0^l\left(P\frac{d\xi}{ds}-Q\frac{d\eta}{ds}\right)ds=\lim_{n=\infty}\int_0^l\left(P_n\frac{d\xi}{ds}-Q_n\frac{d\eta}{ds}\right)ds$$

et

$$\int_0^l\left(P\frac{d\eta}{ds}+Q\frac{d\xi}{ds}\right)ds=\lim_{n=\infty}\int_0^l\left(P_n\frac{d\eta}{ds}+Q_n\frac{d\xi}{ds}\right)ds;$$

d'où, en remarquant que

$$\int_0^l\left(P\frac{d\xi}{ds}-Q\frac{d\eta}{ds}\right)ds+i\int_0^l\left(P\frac{d\eta}{ds}+Q\frac{d\xi}{ds}\right)ds=\int_c f(z)\,dz,$$

$$\int_c f(z)\,dz=\lim_{n=\infty}\int_c f_n(z)\,dz.$$

(¹) *Voir* P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXIV, 1907, p. 311).

Les théorèmes précédents s'appliquent à tout domaine à condition d'entendre par C la frontière complète du domaine.

Du théorème de Weierstrass, il résulte qu'une série de fonctions holomorphes dans un domaine D ne peut converger uniformément que dans un domaine simplement connexe, contenu dans D, puisque la convergence uniforme sur un contour fermé a pour conséquence la convergence uniforme à l'intérieur de ce contour. *Une fonction analytique possédant des points singuliers dans* D *ne pourra, en général, être représentée par la somme d'une série de fonctions holomorphes dans* D, *de polynomes, par exemple, qui convergerait en tous ses points réguliers. Il faudra, pour représenter la fonction, soit introduire des séries de fonctions* $f_n(x)$ *possédant, elles aussi, des points singuliers dans* D, *par exemple des fractions rationnelles, soit abandonner la condition d'uniformité de la convergence.*

Les familles de fonctions holomorphes bornées.

Si des fonctions $f_n(x)$ holomorphes dans un domaine D, dans lequel leurs modules sont inférieurs à un nombre fixe indépendant de n, forment une suite convergente dans D, la fonction limite $f(x)$ est holomorphe dans D et la convergence est uniforme : c'est une conséquence immédiate de la proposition démontrée plus haut. Mais il y a plus, et la convergence en une infinité de points du domaine suffit à assurer la convergence uniforme dans tout le domaine. Stieltjes avait déjà démontré en 1894 ([1]) que la convergence uniforme, dans une aire contenue dans D, si petite soit-elle, entraîne la convergence à l'intérieur du domaine. Nous démontrerons que *si une suite de fonctions holomorphes dont les modules sont bornés dans un domaine connexe* D *converge en une infinité de points de ce domaine ayant au moins un point limite* P *intérieur à* D, *cette suite converge uniformément en tous les points du domaine ouvert* D.

La démonstration va résulter d'une proposition générale relative

([1]) STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. VIII, 1894) et *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. II, lettres nos 399 et 400.

aux familles de fonctions holomorphes à modules bornés et dont je donne plus loin la démonstration : imaginons qu'on ait une famille de fonctions régulières dans un domaine D et supposons que le module de chacune de ces fonctions ne dépasse jamais un nombre fixe, le même pour toutes les fonctions de la famille; dans ces conditions, de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans le domaine ouvert D vers une fonction limite nécessairement analytique.

Supposons donc qu'une suite de fonctions

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots,$$

bornées en module, dans le domaine D où elles sont régulières, convergent pour une infinité de points ayant au moins un point limite P intérieur à D.

De la suite $f_n(x)$, on peut extraire une nouvelle suite

$$f_{p_1}(x),\quad f_{p_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{p_n}(x),\quad \ldots,$$

qui converge uniformément dans D vers une fonction analytique; je peux de même, de toute suite infinie de fonctions tirée de la suite $f_n(x)$, extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans D. Toutes ces suites convergentes ont les mêmes valeurs limites aux points où la suite $f_n(x)$ converge; il en résulte que leurs fonctions limites, qui sont holomorphes dans D, sont égales au point P et que toutes leurs dérivées de même ordre sont aussi égales en P. Ces fonctions sont donc identiques, puisqu'elles ont le même élément au point P. Il résulte de là que la suite $f_n(x)$ converge uniformément dans le domaine ouvert D vers cette fonction limite commune $f(x)$: car s'il en était autrement, il existerait un nombre ε et une infinité de fonctions,

$$f_{q_1}(x),\quad f_{q_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{q_n}(x),\quad \ldots,$$

extraites de la suite $f_n(x)$ et telles que pour chacune d'elles $f_{q_n}(x)$, il y ait au moins un point [1], intérieur au domaine D_1 intérieur à D, pour lequel

$$|f(x) - f_{q_n}(x)| > \varepsilon;$$

---

[1] Et par conséquent un petit domaine entourant ce point, puisque f, f_{q_n} sont continues.

dans ces conditions, il serait impossible d'extraire de la suite $f_{q_n}(x)$ une suite nouvelle convergeant uniformément vers $f(x)$ dans le domaine D_1, ce que nous ne pouvons admettre. Donc la suite $f_n(x)$ converge uniformément dans tout domaine intérieur à D.

J'ai réservé la démonstration de la proposition fondamentale relative aux fonctions bornées, proposition que nous aurons souvent à utiliser [1].

Soit donc une famille de fonctions holomorphes dont le module ne dépasse pas M pour tous les points de D; nous voulons démontrer qu'*on peut former avec les fonctions de cette famille, une suite infinie convergeant uniformément dans* D.

Supposons d'abord que le domaine D soit un cercle de rayon R et soit D′ un cercle concentrique de rayon $\rho < R$. Dans ce cercle, chaque fonction de la famille est développable en série entière. Choisissons une suite infinie quelconque de fonctions de cette famille, soit

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

la suite considérée.

On a, pour la fonction $f_p(x)$ et dans le cercle D′,

$$f_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \ldots + a_p^n x^p + \ldots,$$

avec

$$|a_p^n| < \frac{M}{R^p},$$

d'après l'inégalité fondamentale relative aux coefficients de la série de Taylor.

---

(1) Cette proposition joue pour les familles de fonctions analytiques bornées en module dans un domaine, un rôle équivalent à celui que remplit pour les familles de fonctions *également continues*, la proposition analogue de M. Arzelà. Cette dernière a été utile, en particulier, dans la démonstration de M. Hilbert du principe de Dirichlet et dans les recherches de M. Lebesgue sur le problème de Plateau Tout récemment, le théorème relatif aux fonctions analytiques a été employé par M. Kœbe dans ses travaux sur l'uniformisation des fonctions et par M Hilbert dans une Note sur les équations intégrales. D'ailleurs, des fonctions bornées en module sont également continues, c'est-à-dire qu'à chaque nombre ε, on peut faire correspondre un nombre α tel que la différence $f(x) - f(x')$ ait un module inférieur à ε, quelle que soit la fonction $f(x)$ de la famille, pourvu que la distance des deux points x et x' intérieurs à D ne dépasse pas α

Si l'on pose

$$R_p^n(x) = a_{p+1}^n x^{p+1} + a_{p+2}^n x^{p+2} + \dots,$$

on aura, pour tout point x dans D',

$$|R_p^n(x)| < \left(\frac{\rho}{R}\right)^p \frac{M}{1-\frac{\rho}{R}},$$

et le second membre sera inférieur à ε; si l'on prend p assez grand; on aura alors, quel que soit n et quel que soit x dans D',

$$|R_p^n(x)| < \varepsilon,$$

p étant supérieur à un nombre p_0, indépendant de n.

Considérons maintenant l'ensemble des coefficients a_p^n; je dis qu'on peut trouver une suite de nombres entiers croissants n_1, n_2, ..., n_q, ..., tels que la suite

$$a_p^{n_1}, \quad a_p^{n_2}, \quad \dots, \quad a_p^{n_q}, \quad \dots$$

ait une limite finie A_p lorsque q croît indéfiniment, et cela, quelle que soit la valeur fixée pour p.

En effet, les modules des termes de la suite

$$a_0^1, \quad a_0^2, \quad \dots, \quad a_0^n, \quad \dots$$

sont inférieurs à M, soit A_0, une des valeurs limites de cette suite [1]; on peut donc, de la suite a_0^n, extraire une suite

$$a_0^{n_1}, \quad a_0^{n_1'}, \quad a_0^{n_1''}, \quad \dots \tag{1}$$

convergeant vers A_0. De même les termes de la suite

$$a_1^{n_1}, \quad a_1^{n_1'}, \quad a_1^{n_1''}, \quad \dots,$$

sont, en module, inférieurs à $\frac{M}{R}$, on peut, de la suite des a_1, extraire une suite

$$a_1^{n_1}, \quad a_1^{n_2}, \quad a_1^{n_2'}, \quad a_1^{n_2''}, \quad \dots, \tag{2}$$

[1] En d'autres termes, A_0 est un point limite de l'ensemble des points a_0^n.

convergeant vers une limite A_1. De même, de la suite

$$a_2^{n_1},\quad a_2^{n_1'},\quad a_2^{n_1''},\quad a_2^{n_1'''},\quad \ldots,$$

on peut extraire une suite

$$(3)\qquad a_2^{n_2},\quad a_2^{n_2'},\quad a_2^{n_2''},\quad a_2^{n_2'''},\quad \ldots,$$

ayant pour limite A_2, ... En continuant ainsi, on définit une suite de nombres entiers croissants

$$n_1,\quad n_2,\quad \ldots,\quad n_q,\quad \ldots$$

tels que la suite

$$(p)\qquad a_p^{n_1},\quad a_p^{n_2},\quad \ldots,\quad a_p^{n_q},\quad \ldots$$

ait pour limite un nombre A_p, pour toute valeur de p, lorsque q croît indéfiniment. En effet, pour $p=0$, les termes de la suite (p), ayant été choisis parmi ceux de la suite (1), doivent avoir pour limite A_0; pour $p=1$, les termes de la suite (p) ont pour limite A_1, puisqu'ils font partie de la suite (2), et ainsi de suite. Considérons maintenant la série

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots,$$

elle est convergente dans D'; on a, en effet,

$$\begin{aligned} &| A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots + A_{p+h} x^{p+h} | \\ &\quad = \lim_{q=\infty} \left| a_p^{n_q} x^p + a_{p+1}^{n_q} x^{p+1} + \ldots + a_{p+h}^{n_q} x^{p+h} \right| \leqq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

et cette inégalité a lieu lorsque p est supérieur à p_0 pour toute valeur de h. On a donc, en posant

$$R_p(x) = A_{p+1} x^{p+1} + \ldots + A_{p+h} x^{p+h} + \ldots,$$

$$| R_p(x) | \leqq 2\varepsilon, \qquad p > p_0.$$

La série dont les coefficients sont A_p représente donc une fonction holomorphe dans le cercle D' et, par conséquent, dans D, puisque la détermination des A_p ne dépend pas de ρ.

Je dis que la suite des fonctions

$$f_{n_1}(x),\quad f_{n_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{n_q}(x),\quad \ldots$$

a pour limite $f(x)$, uniformément dans D'.

Supposons $p > p_0$ et soit

$$S_p^{n_q}(x) = a_0^{n_q} + a_1^{n_q}x + \ldots + a_p^{n_q}x^p,$$
$$S_p(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p.$$

$S_p^{n_q}(x)$ converge uniformément vers $S_p(x)$, dans D′, puisque les coefficients du premier polynome ont pour limites ceux du second, donc, pour q assez grand, on aura

$$|S_p(x) - S_p^{n_q}(x)| < \varepsilon,$$

quel que soit x dans D′. D'ailleurs,

$$|R_p(x) - R_p^{n_q}(x)| < |R_p(x)| + |R_p^{n_q}(x)| < 3\varepsilon,$$

puisque $p > p_0$; donc comme

$$f_{n_q}(x) = S_p^{n_q}(x) + R_p^{n_q}(x),$$
$$f(x) = S_p(x) + R_p(x),$$

on aura

$$|f(x) - f_{n_q}(x)| < 4\varepsilon$$

si q est assez grand.

Supposons maintenant que D soit un domaine limité par un ou plusieurs contours; faisons déplacer un petit cercle de rayon δ de manière que son centre décrive successivement tous les contours limitant D, et soit D′ le domaine, unique si δ est assez petit, obtenu en supprimant de D la partie de ce dernier domaine qui a été balayée par le petit cercle. Autour de chaque point du domaine fermé D′, traçons un cercle ayant ce point pour centre et tel que toutes les fonctions soient régulières à l'intérieur et sur la circonférence du cercle. Il résulte du théorème de Borel-Lebesgue, qu'on peut recouvrir entièrement D′, à l'aide d'un nombre fini k de ces cercles : soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, les cercles conservés et $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, une suite de fonctions prises dans la famille considérée. Je puis trouver une suite

$$f_1^1(x), \quad f_2^1(x), \quad \ldots, \quad f_n^1(x), \quad \ldots,$$

extraite de la suite $f_n(x)$ et qui dans Γ_1, converge uniformément vers une fonction limite; de la suite $f_n^1(x)$, je peux extraire une suite

$$f_1^2(x), \quad f_2^2(x), \quad \ldots, \quad f_n^2(x), \quad \ldots,$$

qui dans Γ_2 converge uniformément, et qui, par conséquent, converge uniformément dans Γ_1 et Γ_2, on peut continuer ainsi et définir une suite $f_n^k(x)$, extraite de la suite $f_n^{k-1}(x)$, qui convergera uniformément dans $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, c'est-à-dire dans D', vers une fonction nécessairement holomorphe.

Donnons maintenant au nombre δ une suite de valeurs δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ décroissant jusqu'à zéro et soient $D'_1, D'_2, \ldots, D'_r, \ldots$ les domaines D' correspondants

On peut définir une suite $f_n^1(x)$, extraite de la suite $f_n(x)$ et qui converge dans D'_1; de cette suite $f_n^1(x)$ on peut extraire la suite $f_n^2(x)$, qui converge dans $D'_2, \ldots$; de la suite $f_n^{r-1}(x)$ qui converge dans D'_{r-1} on peut extraire la suite $f_n^r(x)$ qui converge, en outre, dans D'_r. La suite

$$f_1^1(x),\quad f_2^2(x),\quad \ldots,\quad f_i^i(x),\quad \ldots,$$

converge dans le domaine ouvert D et uniformément à l'intérieur de D, car toutes les fonctions de cette suite appartiennent à $f_n^r(x)$ quel que soit r, au moins à partir de la ($r^{\text{ième}}$), et, par conséquent, la suite converge dans D'_r, quel que soit r.

La proposition est donc établie. Il en résulte, évidemment, que si l'on a une famille de fonctions holomorphes et bornées dans le domaine D, de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de D.

Réciproquement, *si une famille de fonctions analytiques dans* D *possède la propriété que, de toute suite infinie de ces fonctions on puisse extraire une suite nouvelle ayant une fonction limite, le module de toutes ces fonctions reste inférieur à un nombre fixe, dans tout domaine intérieur à* D.

Soit D_1 un domaine intérieur à D; si les fonctions de la famille n'ont pas leurs modules bornés dans le domaine fermé D_1, on peut, quel que soit l'entier p, trouver une fonction $f_p(x)$, pour laquelle on ait, en un point de D_1, et même dans un petit domaine entourant ce point,

$$|f_p(x)| > p.$$

Par hypothèse, de la suite

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_p(x),\quad \ldots,$$

ainsi définie, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans D_1 vers une fonction holomorphe $f(x)$, soit

$$f_{n_1}(x),\quad f_{n_2}(x),\quad \ldots,\quad f_{n_q}(x),\quad \ldots,$$

cette suite convergente; on aura pour q assez grand

$$|f(x) - f_{n_q}(x)| < \varepsilon,$$

d'où

$$|f_{n_q}(x)| < |f(x)| + \varepsilon;$$

donc $f_{n_q}(x)$ a, quel que soit q, son module borné, ce qui contredit l'hypothèse qu'il y a un point de D_1 où

$$|f_{n_q}(x)| > n_q.$$

On ne peut donc pas supposer que les modules des fonctions ne soient pas bornés [1].

Voici une conséquence très simple du théorème sur les fonctions bornées qui nous sera utile. Soit $f(t, x)$, une fonction des deux variables t et x, et supposons que pour chaque valeur réelle de t comprise entre 0 et 1, par exemple, la fonction $f(t, x)$ soit holomorphe dans un domaine D; en outre,

$$|f(t, x)| < M,$$

quel que soit t entre 0 et 1 et x dans D; dans ces conditions, l'intégrale

$$\int_0^1 f(t, x)\, dt \tag{1}$$

représente une fonction holomorphe de x dans le domaine D; cette intégrale est, en effet, pour chaque valeur de x, la limite de

---

[1] On peut donner au théorème sur les familles de fonctions bornées une forme plus générale; s'il existe un nombre a tel que pour toute fonction $f(x)$ de la famille le module de $f(x) - a$ $\left(\text{ou de } \frac{1}{f} \text{ si } a = \infty\right)$ reste supérieur à un nombre fixe indépendant de n, on pourra former avec les fonctions de la famille, une suite convergeant uniformément. En d'autres termes, si l'ensemble des points représentant les valeurs de toutes les fonctions $f(x)$ n'est pas dense dans tout le plan, la propriété subsiste. Pour la démonstration, voir *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 309).

Je signale aussi, en passant, que les propositions établies dans ce paragraphe s'étendent aisément aux fonctions harmoniques

la suite de fonctions holomorphes

$$f_n(x) = \frac{f(0, x) + f\left(\frac{1}{n}, x\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}, x\right)}{n}$$

et ces fonctions sont bornées puisque

$$|f_n(x)| < M.$$

Plus généralement, supposons qu'on ait

$$f(t, x) = \varphi(t, x) V(t),$$

$\varphi(t, x)$ est bornée dans D,

$$|\varphi(t, x)| < M$$

et $V(t)$ une fonction qui peut devenir infinie, mais qui est absolument intégrable : en d'autres termes, $\int_0^1 |V(t)|\, dt$ a un sens. Dans ces conditions, il est facile de voir que l'intégrale (1) a un sens pour chaque valeur de x et représente une fonction holomorphe. Il nous suffira de le montrer pour le cas où $V(t)$ devient infinie pour une seule valeur α de t $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$. Par hypothèse, on a pour n assez grand

$$\int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha - \frac{1}{n+1}} |V(t)|\, dt < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitraire. Soit

$$\varphi_n(x) = \int_0^{\alpha - \frac{1}{n}} f(t, x)\, dx,$$

on a

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| < M \int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha - \frac{1}{n+1}} |V(t)|\, dt < M\varepsilon,$$

donc l'intégrale $\int_0^\alpha f(t, x)\, dx$ a un sens; elle représente une fonction holomorphe, puisque c'est la limite de la suite uniformément convergente des $\varphi_n(x)$, de même $\int_\alpha^1 f(t, x)\, dx$ est une fonction holomorphe : la proposition est établie.

Enfin, on voit facilement que les résultats précédents subsistent si la fonction $f(t, x)$ est définie pour des valeurs complexes de t et si l'intégrale est étendue à un arc de courbe rectifiable tracée dans la région du plan des t où la fonction $f(t, x)$ est définie et vérifie les conditions introduites plus haut.

Les séries de polynomes.

Les séries de polynomes apparaissent comme une généralisation naturelle des séries de puissances; mais, tandis qu'une série de Taylor converge nécessairement d'une manière uniforme dans son cercle de convergence, une série de polynomes convergente dans un domaine ne converge uniformément que dans certaines régions de ce domaine et la somme de cette série peut représenter soit une fonction analytique, soit plusieurs ou même une infinité de fonctions analytiques distinctes. Par exemple si la convergence est uniforme et le domaine connexe, la somme est une fonction holomorphe dans ce domaine, et réciproquement, nous verrons que toute fonction holomorphe dans un domaine peut être représentée par la somme d'une série de polynomes uniformément convergente. Par conséquent, pour obtenir des propriétés précises des sommes de telles séries, il sera nécessaire d'en particulariser la forme et de les séparer en familles unies par des propriétés communes. Nous adopterons la classification, introduite par M. Borel (¹) et nous distinguerons en classes et en catégories les séries de polynomes.

Soit une série de polynomes

$$P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x) + \ldots$$

dans laquelle on peut toujours supposer que le polynome $P_n(x)$ est de degré n,

$$P_n(x) = a_n^0 + a_n^1 x + \ldots + a_n^p x^p + \ldots + a_n^n x^n,$$

et une autre série

$$Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_n(x) + \ldots$$

(¹) E. Borel, *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta Mathematica*, t. XXIV, 1901, p. 332).

avec

$$Q_n(x) = b_n^0 + b_n^1 x + \ldots + b_n^p x^p + \ldots + b_n^n x^n,$$

le rapport $\frac{b_n^p}{a_n^p}$ des coefficients de la même puissance de x dans les termes de même rang dépend des deux indices n et p, nous considérons le cas où ce rapport ne dépend que de l'un de ces deux indices.

1° Le rapport ne dépend que de n; on a

$$b_n^p = c_n a_n^p$$

et par suite

$$Q_n(x) = c_n P_n(x),$$

nous dirons que les deux séries appartiennent à la même *catégorie;* une série dont le terme général est $P_n(x)$ définit une catégorie de séries obtenues en remplaçant dans la première $P_n(x)$ par

$$Q_n(x) = c_n P_n(x),$$

les c_n étant des nombres quelconques. Si aucun des c_n n'est nul, on aura aussi

$$P_n(x) = \frac{1}{c_n} Q_n(x)$$

et la catégorie définie par les $Q_n(x)$ sera identique à celle que les $P_n(x)$ définissent; chacune des deux séries est un *représentant complet* de la catégorie. Si plusieurs des c_n sont nuls, la série $Q_n(x)$ définit une catégorie contenue dans celle des $P_n(x)$. Nous étudierons dans le Chapitre III des catégories importantes dues à M. Faber.

2° Supposons maintenant que le rapport $\frac{b_n^p}{a_n^p}$ ne dépende que de p,

$$b_n^p = c_p a_n^p;$$

$Q_n(x)$ se déduit alors de $P_n(x)$ par la substitution de $c_p x^p$ à x^p; nous dirons que les deux séries appartiennent à la même *classe*. Si aucun des c_p n'est nul, les deux séries $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ définissent la même classe dont chacune d'elles est un représentant complet. Si certains c_p sont nuls, la classe définie par les $Q_n(x)$ est contenue dans la classe définie par les $P_n(x)$.

Par exemple, les développements de M. Mittag-Leffler, conver-

gents dans des étoiles rectilignes [1], forment une classe dont on obtient un représentant complet en développant $\frac{1}{1-x}$, en série de polynomes $P_n(x)$, convergeant dans toute portion finie du plan qui n'a aucun point commun avec le segment rectiligne $(+1, \infty)$. De même les développements dans les étoiles curvilignes de M. Painlevé forment aussi des classes de séries de polynomes [2].

Les séries de puissances forment soit une classe, soit une catégorie, dont on peut prendre comme représentant complet le développement de $\frac{1}{1-x}$ en série de Mac-Laurin.

Étude de certaines classes de séries de Taylor.

Les séries de Taylor dont il s'agit ici sont de la forme

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n + \ldots; \tag{1}$$

en laissant fixes soit les a_n, soit les b_n, on aura des classes particulières. Nous démontrerons, au sujet des fonctions analytiques définies par de tels éléments, des théorèmes fondamentaux dus à M. Hadamard.

Supposons d'abord qu'on ait

$$b_n = \int_0^1 V(t) t^n \, dt,$$

$V(t)$ étant une fonction de la variable réelle t telle que l'intégrale $\int_0^1 |V(t)|\,dt$ ait un sens. Dans ces conditions, *la fonction* $F(x)$ *définie par l'élément* (1) *est holomorphe dans l'étoile rectiligne de la fonction*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n;$$

---

(1) On appelle *étoile rectiligne relative* à un point O et à une fonction $f(x)$, l'ensemble des points M du plan tels que le segment OM ne contienne aucun point singulier de $f(x)$; en d'autres termes, c'est l'ensemble des points qu'on peut atteindre, en partant du point O, par un prolongement analytique rectiligne. L'étoile curviligne s'obtient en remplaçant le segment OM par un arc de courbe ayant ses extrémités en O et en M et semblable à un arc de courbe fixe.

(2) *Voir* les *Leçons sur les séries divergentes* de M. Borel, p. 156, et la Note de M. Painlevé dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. Borel.

si $V(t)$ *est holomorphe dans un domaine contenant le segment rectiligne* $(0, +1)$, *la fonction* $F(x)$ *ne peut avoir, dans tout le plan, d'autres points singuliers que ceux de* $f(x)$ (¹).

Soit α un point singulier de $f(x)$, prolongeons la droite $O\alpha$ au delà de α jusqu'à l'infini et supprimons du plan le segment (α, ∞); supposons cette opération effectuée pour chaque point singulier, le domaine D restant après la suppression des segments constitue l'étoile rectiligne de la fonction $f(x)$; je dis que la fonction $F(x)$ est, comme la fonction $f(x)$, holomorphe en tous les points de D. Décrivons un cercle Γ de centre origine et de rayon p, et autour de chaque point singulier des cercles γ ayant ces points pour centres et $\frac{1}{p}$ pour rayon; les cercles homothétiques à l'un des cercles γ, le centre d'homothétie étant à l'origine et le rapport supérieur ou égal à 1 balaient une aire d. Soit D_p le domaine obtenu en supprimant de Γ les points contenus dans les aires d. Lorsqu'on fait croître p, tous les points de D entrent dans le domaine D_p.

Dans le cercle de convergence de $f(x)$, on a

$$f(tx) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n t^n x^n \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

et

$$\int_0^1 V(t) f(tx)\, dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \int_0^1 V(t) t^n\, dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n b_n x^n = F(x) \quad (^2).$$

Or l'intégrale

$$\int_0^1 V(t) f(tx)\, dt$$

représente, comme nous l'avons vu, une fonction holomorphe dans D_p, la proposition est donc établie (³).

(¹) HADAMARD, *Essai sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892, p. 163).

(²) En effet, si $V(t)$ est bornée, la série $V(t) f(tx)$ est intégrable terme à terme; si $V(t)$ peut devenir infinie, on démontre aisément, en remarquant que $V(t)$ est absolument intégrable, que l'intégration terme à terme est encore légitime.

(³) Il suffit même de supposer que $\int_0^1 V(t)\, dt$ ait un sens, ou encore si $a_0 = a_2 = \ldots = a_{q-1} = 0$, que $\int_0^1 t^q V(t)\, dt$ ait un sens. *Voir* FABER, *Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorischer Reihen* (*Math. Annalen*, Bd. LVII, 1903, p. 369).

Si la fonction $V(t)$ est holomorphe dans un domaine δ contenant le segment $(0, +1)$, on pourra remplacer l'étoile rectiligne D par une étoile curviligne, de sorte que les rayons précédemment exclus apparaîtront comme des coupures artificielles et que seuls les points singuliers de $f(x)$ pourront être des points singuliers de $F(x)$. En effet, on peut, dans ce qui précède, remplacer l'intégrale $\int_0^1 V(t) f(tx)\,dt$, étendue au chemin rectiligne, par une intégrale étendue à une ligne rectifiable l, allant du point 0 au point 1 et contenue tout entière dans le domaine δ. Soit encore α un point singulier de $f(x)$, x un point quelconque du plan, pour que $f(tx)$ soit régulière au point t de l, il ne faut pas qu'on ait $tx = \alpha$, c'est-à-dire $x = \frac{\alpha}{t}$; les points x exclus seront donc situés sur les lignes L_α décrites par le point $x = \frac{\alpha}{t}$ lorsque le point t décrit la courbe l : construisons d'abord la ligne L déduite de l par la transformation $x = \frac{1}{t}$; L_α est une courbe semblable à L, dans laquelle le point α correspond au point 1 de L et le point O se correspond à lui-même [1].

Voici maintenant un théorème plus général, également dû à M. Hadamard. Soient les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ définies par les éléments

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots;$$

les rayons de convergence de ces deux séries étant respectivement R et R' non nuls, *la fonction* $F(x)$ *définie par l'élément* (1)

$$F(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_n b_n x^n + \ldots$$

ne peut avoir, dans tout le plan, d'autre point singulier que les points $\alpha\beta$, α *désignant l'affixe d'un point singulier de* $f(x)$ *et* β *l'affixe d'un point singulier de* $\varphi(x)$ [2].

---

[1] Il importe que les lignes L_α ne se coupent pas ; par exemple, on pourra prendre pour l, un arc de spirale logarithmique enroulée autour de O, les L_α seront alors des arcs de spirales, issus des points singuliers α. J'ajoute que dans l'étude de l'intégrale curviligne, il suffit de supposer que sur la courbe l, $tV(t)$ tende vers zéro avec t et $(1-t)V(t)$ tende vers zéro avec $(1-t)$.

[2] HADAMARD, *Un théorème sur les séries entières* (*Acta mathematica*, t. XXII, 1898).

Nous supposerons, pour plus de clarté, que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ n'ont que des points singuliers isolés. Décrivons un cercle Γ de centre origine et de grand rayon R, et autour de chaque point α comme centre, un petit cercle γ; nous réunirons un point de la circonférence de γ à un point de la circonférence de Γ par une ligne l supposée parcourue deux fois dans des sens opposés de manière à former une coupure à deux bords. Soit C la ligne formée par les circonférences γ et Γ, et les lignes l; C limite un domaine fermé D simplement connexe, dans lequel $f(x)$ est holomorphe. Considérons l'intégrale

$$(2) \qquad F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} \quad (1),$$

$f(x)$ est régulière sur le contour C; si $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ n'est pas régulière en un point z de ce contour, c'est qu'on a

$$x = z\beta;$$

alors x est situé sur le contour C_β semblable à C décrit par le point $x = z\beta$ lorsque, β restant fixe, le point z décrit C. C_β est formé par un cercle Γ_β de centre origine, des cercles γ_β ayant pour centres les points $\alpha\beta$ et des lignes l_β; si $\varphi(x)$ a un seul point singulier β, le contour C_β limite un domaine D_β semblable à D, et si x est à l'intérieur de ce domaine et z sur C, la fonction $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ est régulière et bornée. Si $\varphi(x)$ a plusieurs points singuliers β, β', β'', ... rangés dans l'ordre des modules non décroissants, on laissera x à l'intérieur du domaine D'_β, limité par le cercle Γ_β, les cercles γ_β, $\gamma_{\beta'}$, $\gamma_{\beta''}$ ... de centres $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$, $\alpha\beta''$, ... qu'il contient et les lignes l_β, $l_{\beta'}$, $l_{\beta''}$, ... correspondantes limitées à leurs points de rencontre avec Γ_β; ce domaine existe si R est assez grand et les rayons des cercles γ assez petits; x étant dans ce domaine D'_β et z sur C, la fonction $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ est régulière et bornée. Donc l'intégrale (2) représente une fonction holomorphe dans D'_β. Calculons maintenant l'élément à l'origine de $F(x)$.

Nous pouvons remplacer, pour chaque valeur de x, le con-

(1) Une intégrale de cette forme avait déjà été considérée par Parseval (*Mémoires des Savants étrangers*, t. I, 1806).

tour C par celui d'un cercle C_1 de centre origine et de rayon inférieur à R; nous supposerons en outre que dans ce cercle $\left|\frac{x}{z}\right| < R'$, ce qui exige $|x| < RR'$, les fonctions $f(z)$ et $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ sont développables en séries de Mac-Laurin et l'on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1} f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n \int_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

car la série $\sum \frac{b_n x^n}{z^{n+1}} f(z)$, convergeant uniformément sur la circonférence C_1 est intégrable terme à terme. Mais d'après la formule fondamentale de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} = a_n,$$

donc

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n b_n x^n,$$

ce qui nous montre que la fonction holomorphe définie par l'intégrale dans le domaine D'_β est le prolongement analytique de la fonction définie par l'élément (1). Le rayon du cercle Γ et ceux des cerles γ sont arbitraires; il en est de même des lignes l, il en résulte immédiatement que, dans tout le plan, les seuls points singuliers possibles de $F(x)$ sont les points $\alpha\beta$.

La démonstration que nous avons faite est relative au plan des x, dans lequel on a tracé des coupures ne permettant pas de tourner autour des points $\alpha\beta$; ces lignes peuvent être supprimées dans les démonstrations lorsque ni le point α n'est critique pour $f(x)$, ni le point β pour $\varphi(x)$. Dans le cas contraire, on voit que la démonstration ne s'applique qu'à la branche de la fonction $F(x)$, définie à l'origine par l'élément (3) et prolongée dans le plan sans traverser les coupures.

Le résultat de M. Hadamard est cependant général et la fonction $F(x)$, considérée dans tout son domaine d'existence n'a d'autre point singulier possible que les points $\alpha\beta$ *ou le point* o qui peut

être singulier pour les branches de la fonction $F(x)$ autres que celle représentée à l'origine par (1) [1].

On voit aisément comment la démonstration peut être modifiée lorsque les points α et β ne sont plus isolés; si par exemple les points α forment une coupure non fermée S, on remplacera les cercles γ par un contour entourant cette ligne qu'on reliera à Γ par une ligne l. Mais si l'une des fonctions, f par exemple, admet une coupure fermée, on sera amené à exclure du plan des x des domaines S_β dans lesquels $F(x)$ pourra peut-être être prolongée puisque les points $\alpha\beta$ sont seulement des points singuliers possibles, et admettre des points singuliers [2].

---

[1] Pour la démonstration, *voir* une Note de M. BOREL, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVI, p. 238), et G. FABER, *Bemerkungen zu einem functionentheoretischen Satze des H. Hadamard* (*Jahresbericht der deutsche mathematiker Vereinigung*, Bd. XVI, 1907, p. 285). Voici un exemple simple du cas où o peut être singulier. Soit

$$f(x) = \varphi(x) = L\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n},$$

on aura

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_0^x \frac{1}{x} L\frac{1}{1-x}\,dx,$$

cette fonction $F(x)$ admet le point singulier 1 et le point singulier o pour les branches autres que celle qui s'annule à l'origine.

[2] Voici un exemple dû à M. Faber (*loc. cit.*). La fonction

$$\psi(x) = 1 + x^2 + x^{2^2} + \ldots + x^{2^p} + \ldots$$

admet son cercle de convergence de rayon 1 comme coupure : en effet, si nous supprimons les $p+1$ premiers termes de la série, le reste aura les mêmes singularités que $\psi(x)$. Or tous les exposants des termes de ce reste sont divisibles par 2^{p+1}, donc si x_0 est un point singulier du cercle de convergence, tous les points $x_0 e^{\frac{2k\pi}{2^p}}$ de ce cercle sont aussi singuliers; or ces points forment un ensemble dense sur le cercle. Les coefficients de la série $\psi(x)$ étant tous positifs, on peut prendre ici $x_0 = 1$.

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$$

$a_n = 1$ si n n'est pas une puissance de 2 et $a_n = 2$ si $n = 2^p$) admet aussi ce

M. Borel (1) a ajouté à ce théorème le complément suivant : *La nature de la singularité de* $F(x)$ *au point* $\alpha\beta$ *dépend exclusivement de la nature des singularités de* $f(x)$ *en* α *et de* $\varphi(x)$ *en* β.

La démonstration repose sur l'étude de la nature de la transformation qui fait correspondre la fonction $F(x)$ à la fonction $f(x)$. Si on laisse fixe la fonction $\varphi(x)$, nous pouvons déduire de chaque fonction analytique $f(x)$ une fonction analytique $F(x)$ dont la forme dépend de celle de $f(x)$; notre transformation est donc une opération fonctionnelle et cette opération est *distributive* (2), c'est-à-dire que si de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$ on déduit $F_1(x)$ et $F_2(x)$, de la fonction f_1+f_2 on déduira F_1+F_2. Si l'on désigne par $H(f, \varphi)$ l'opération considérée, on aura

$$H(f_1+f_2, \varphi) = H(f_1, \varphi) + H(f_2, \varphi).$$

Supposons donc que $f(x)$ ait un point singulier en α, on peut poser

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

$f_1(x)$ est régulière dans tout le plan, sauf en α, où elle a la même singularité que $f(x)$ et $f_2(x)$ est régulière en α (3).

---

même cercle de rayon 1 comme coupure. Soit

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{a_n} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{1}\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{3}\right),$$

$\varphi(x)$ admet comme coupure le cercle de rayon 2. On a ici $|\alpha\beta| = 2$; or

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

admet le point singulier $x = 3$. Il est vrai que, pour faire disparaître cette exception, il suffit de considérer comme points singuliers de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ non seulement les points frontières des domaines d'existence de ces fonctions, mais encore tous les points qui n'appartiennent pas à ces domaines.

(1) *Loc. cit.*

(2) *Voir* PINCHERLE, *Sur le calcul fonctionnel distributif* (*Math. Annalen*, t. XLIX, 1897, p. 325). On devrait dire distributive par rapport à l'addition.

(3) Je dis que $f_1(x)$ a la même singularité que $f(x)$ en α lorsque la différence $f-f_1$ est régulière en α; l'existence de la fonction f_1 est évidente dans le cas du pôle ou du point essentiel isolé : il suffit de prendre pour f_1, la partie du développement de f en série de Laurent qui contient les puissances négatives de $x-\alpha$. Dans le cas où α est un point critique, *voir* FABER, *Ueber analytische Functionen mit vorgeschriebenen Singularitäten* (*Math. Annalen*, Bd. LX, 1905, p. 379).

On a alors

$$F(x) = H(f, \varphi) = H(f_1, \varphi) + H(f_2, \varphi)$$

Or $H(f_2, \varphi)$ est régulière en α, car les seuls points singuliers possibles de cette fonction sont $\alpha'\beta'$ avec $\alpha' \neq \alpha$ et nous supposerons qu'aucun produit $\alpha'\beta'$ n'est égal à $\alpha\beta$. Donc $F(x)$ a au point $\alpha\beta$ la même singularité que $H(f_1, \varphi)$; posons de même

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

$\varphi_2(x)$ étant régulière en α, et $\varphi_1(x)$ régulière dans tout le plan, sauf en α où elle a la même singularité que $\psi(x)$. On a aussi

$$H(f_1, \varphi) = H(f_1, \varphi_1) + H(f_1, \varphi_2);$$

$H(f_1, \varphi_2)$ est régulière en $\alpha\beta$, donc $F(x)$ a la même singularité en $\alpha\beta$ que la fonction $H(f_1, \varphi_1)$ dont le seul point singulier possible est $\alpha\beta$. Or $f_1(x)$ ne dépend que de la nature de la singularité de $f(x)$ en α et $\varphi_1(x)$ de celle de $\varphi(x)$ en β, ce qui établit la proposition.

Prenons par exemple le cas d'un pôle d'ordre p en α et un pôle d'ordre q en β; on peut prendre

$$f_1(x) = \frac{A_1}{1 - \frac{x}{\alpha}} + \frac{A_2}{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^2} + \ldots + \frac{A_p}{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^p}$$

ou, en développant en série de Mac-Laurin,

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P(n) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n,$$

où $P(n)$ est un polynome entier en n de degré $p-1$

$$P(n) = A_1 + \frac{n+1}{1} A_2 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{(p-1)!}$$

On aura de même

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} Q(n) \left(\frac{x}{\beta}\right)^n$$

avec

$$Q(n) = B_1 + \frac{n+1}{1} B_2 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+q-1)}{(q-1)!} B_q,$$

par suite

$$\mathrm{H}(f_1, \varphi_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{P}(n)\,\mathrm{Q}(n)\left(\frac{x}{\alpha\beta}\right)^n;$$

or le polynome $\mathrm{P}(n)\,\mathrm{Q}(n)$ est de degré $p+q-2$ par rapport à n et l'on peut écrire

$$\mathrm{P}(n)\,\mathrm{Q}(n) = \mathrm{C}_1 + \frac{n+1}{1}\mathrm{C}_2 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+q-2)}{(p+q-2)}\mathrm{C}_{p+q-1}$$

comme le montre une identification facile ; on en déduit

$$\mathrm{H}(f_1, \varphi_1) = \frac{\mathrm{C}_1}{1-\frac{x}{\alpha\beta}} + \frac{\mathrm{C}_2}{\left(1-\frac{x}{\alpha\beta}\right)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{C}_{p+q-1}}{\left(1-\frac{x}{\alpha\beta}\right)^{p+q-1}},$$

c'est-à-dire que le point $\alpha\beta$ est un pôle d'ordre $p+q-1$ pour la fonction $\mathrm{F}(x)$.

Cherchons, d'une manière générale quelles conséquences entraîne pour $\mathrm{F}(x)$ l'existence d'un pôle d'ordre p en α. Nous prendrons $\alpha = 1$ pour simplifier et il nous suffira d'étudier $\mathrm{H}(f_1, \varphi)$; or

$$\mathrm{H}(f_1, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=p} \mathrm{H}\left[\frac{\mathrm{A}_k}{(1-x)^k}, \varphi\right] = \sum_{k=1}^{k=p} \mathrm{A}_k \mathrm{H}\left[\frac{1}{(1-x)^k}, \varphi\right],$$

mais

$$\mathrm{H}\left[\frac{1}{(1-x)^k}, \varphi\right] = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{(k-1)!} b_n x^n$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}[x^{k-1}\varphi(x)]}{dx^{k-1}};$$

donc

$$\mathrm{H}(f_1, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathrm{A}_k}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}[x^{k-1}\varphi(x)]}{dx^{k-1}} = \mathrm{C}_0\varphi + \mathrm{C}_1\varphi' + \ldots + \mathrm{C}_{p-1}\varphi^{(p-1)},$$

$\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_{p-1}$ étant des polynomes entiers faciles à former.

On déduit immédiatement de là que si α est un pôle et β un point essentiel isolé, $\alpha\beta$ est un point essentiel et il en est évidemment de même si β est un pôle et α un point essentiel. Lorsque α et β sont tous deux essentiels, on établit qu'il en est de même pour $\alpha\beta$.

Il résulte de ce qui précède que si $f(x)$ est uniforme autour du point α et $\varphi(x)$ uniforme autour de β, $F(x)$ sera uniforme autour de $\alpha\beta$, car α et β ne peuvent être que des pôles ou des points essentiels isolés, et il en est alors de même pour $\alpha\beta$ (¹).

Nous venons de voir des cas dans lesquels le point $\alpha\beta$ est effectivement singulier pour $F(x)$. Lorsque plusieurs des couples $\alpha\beta$ donnent le même point,

$$\alpha\beta = \alpha'\beta' = \ldots,$$

il peut arriver que ce point ne soit pas singulier. Par exemple, si l'on prend

$$f(x) = \sum a_{2n}x^{2n}, \qquad \varphi(x) = \sum b_{2n+1}x^{2n+1},$$

on a

$$F(x) = 0.$$

Au contraire, supposons que le point $\alpha\beta$ ne soit obtenu qu'une seule fois; on peut alors affirmer que ce point est singulier pour $F(x)$, au moins lorsque l'un des points α ou β n'est pas critique (²).

Le théorème de M. Hadamard relatif à la multiplication des singularités a conduit M. Hurwitz à une proposition concernant l'addition des singularités de deux fonctions analytiques. Supposons qu'il s'agisse de deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ régulières à l'infini, ce qu'on peut toujours obtenir par un changement de variable; nous pourrons même, par l'addition de constantes convenables, supposer que ces fonctions soient nulles à l'infini; nous aurons alors

$$f(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^{n+1}} + \ldots,$$

$$\varphi(x) = \frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^{n+1}} + \ldots,$$

développements valables, le premier à l'extérieur d'un cercle de rayon R, le second à l'extérieur d'un cercle de rayon R'. Dans ces conditions, *les seuls points singuliers possibles de la fonc-*

(¹) Cette remarque peut être en défaut si les points α et β ne sont plus isolés.
(²) *Voir* le Mémoire de M. Faber cité dans la note de la page 36.

tion $F(x)$ *dont l'élément à l'infini est*

$$F(x) = \frac{a_0 b_0}{x} + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x^2} + \ldots$$
$$+ \frac{a_0 b_n + C_n^1 a_1 b_{n-1} + \ldots + C_n^k a_k b_{n-k} + \ldots + C_n^n a_n b_0}{x^{n+1}} + \ldots,$$

sont les points $\alpha + \beta$, α *étant l'affixe d'un point singulier de* $f(x)$ *et* β *l'affixe d'un point singulier de* $\varphi(x)$ (¹). (Les C_n^p désignent les coefficients du binome.)

Nous nous servirons de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,\varphi(x-z)\,dz$$

étendue à un contour fermé C que nous allons préciser. Cette intégrale, introduite par M. dell' Agnola, va jouer ici le même rôle que l'intégrale utilisée dans le théorème de M. Hadamard. Nous supposerons encore les α et les β isolés. Décrivons autour de chaque point singulier α de $f(z)$ un petit cercle γ de rayon arbitraire, et réunissons les circonférences de ces cercles à un point quelconque P du plan par des lignes l ne se coupant pas et supposées décrites deux fois dans des sens opposés. L'ensemble des circonférences γ et des lignes l formera le contour C le long duquel l'intégrale sera prise dans le sens inverse. z étant sur C, $\varphi(x-z)$ sera régulière à moins qu'on n'ait

$$x = z + \beta,$$

c'est-à-dire à moins que x ne soit sur le contour C_β déduit de C par la translation β; ce contour est formé de cercles ayant pour centres les points $\alpha + \beta$ et de lignes l_β. Soit D le domaine extérieur à tous les contours C_β; si z est sur C et x dans D, la fonction $\varphi(x-z)$ est holomorphe et bornée, et l'intégrale représente une fonc-

---

(¹) Hurwitz, *Sur un théorème de M. Hadamard* (*Comptes rendus*, 6 février 1899). M. Hurwitz n'a démontré son théorème que dans le cas où les α et les β sont des pôles simples. M. Pincherle et M. dell' Agnola l'ont étendu au cas général. *Voir* Pincherle, *A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard* (*Rendiconto dell' Ac. delle Sc. de Bologna*, 19 février 1899) et *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date* (*Rendiconti dell' Ac. dei Lincei*, 5 mars 1899). Dell' Agnola, *Estensione di un teorema di Hadamard* (*Atti del Institute Veneto*, 14 mai et 18 juin 1899).

tion $F(x)$ holomorphe dans D. Nous allons calculer l'élément à l'infini de cette fonction. On peut remplacer C par un cercle C_1 de rayon supérieur à R; on peut supposer qu'en même temps $x - z$ est extérieur au cercle de rayon R'; il suffit de prendre $|x| > R + R'$. On a alors

$$\varphi(x-z) = \frac{b_0}{x-z} + \frac{b_1}{(x-z)^2} + \ldots + \frac{b_p}{(x-z)^{p+1}} + \ldots$$

et par conséquent, puisque la série dont le terme général est $\frac{b_p f(z)}{(x-z)^{n+1}}$ converge uniformément sur C_1, on aura

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\varphi(x-z)f(z)\,dz = \frac{1}{2i\pi}\sum_{p=0}^{p=\infty} b_p \int_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{p+1}},$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} a_q b_p \int_{C_1}\frac{dz}{z^{q+1}(x-z)^{p+1}};$$

or

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}\frac{dz}{z^{q+1}(x-z)^{p+1}} = \frac{(-1)^p}{p!}\left[\frac{d^p(z^{-q-1})}{dz^p}\right]_{z=x} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\frac{1}{x^{p+q+1}},$$

donc

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} a_q b_p \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\frac{1}{x^{p+q+1}},$$

mais la série du second membre étant absolument convergente, on peut grouper les termes pour lesquels $p+q$ a la même valeur; il vient alors

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty}(a_0 b_n + C_n^1 a_1 b_{n-1} + \ldots + C_n^k a_k b_{n-k} + \ldots + C_n^n a_n b_0)\,\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Comme on peut choisir arbitrairement les lignes l et le point P, on voit que les seuls points du plan où $F(x)$ peut ne pas être régulière sont les points $\alpha + \beta$. Si l'on remarque enfin que la nouvelle opération fonctionnelle qui donne $F(x)$ à partir de $f(x)$ est distributive, on voit que les remarques de M. Borel sur le théorème de M. Hadamard s'appliquent aussi au théorème de M. Hurwitz.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION HOLOMORPHE EN SÉRIE DE POLYNOMES.

Le théorème de M. Painlevé.

Soit D un domaine ouvert simplement connexe dans lequel la fonction $f(x)$ est holomorphe, domaine qui pourra être le domaine d'existence de cette fonction, *on peut, d'une infinité de manières, représenter la fonction $f(x)$ par la somme d'une série de polynomes convergeant uniformément à l'intérieur de* D [1].

Lorsque le domaine D est celui d'un cercle, une solution nous est fournie par la série de Taylor et la démonstration repose sur la formule de l'intégrale de Cauchy et le développement en série entière en x de l'élément $\frac{1}{x-z}$. C'est cette même intégrale qui interviendra dans les solutions que nous donnerons du problème général; elle sera calculée tantôt à l'aide de développements particuliers de l'élément $\frac{1}{x-z}$, tantôt par une méthode directe d'approximation. M. Painlevé a d'abord démontré le théorème pour une aire limitée par un contour convexe (1886); la démonstration générale a été donnée par M. Hilbert (1897) et résulte d'ailleurs d'un théorème de M. Runge sur la représentation d'une fonction holomorphe par une série de fractions rationnelles (1885) [2].

Voici la méthode de M. Painlevé pour le cas d'une aire D

---

(1) *Voir* la note (2) de la page 17.

(2) Enfin M. Painlevé a, par des méthodes nouvelles, obtenu des résultats très généraux sur la représentation des fonctions analytiques par des séries de polynomes ou de fractions rationnelles. [*Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes* et *Sur le développement des fonctions uniformes ou holomorphes dans un domaine quelconque* (*Comptes rendus*, t. CXXVI, 1898, p. 200 et 318).]

limitée par un contour convexe C (1). Je dis d'abord qu'on peut construire, en chaque point A du contour C, un cercle de rayon R tangent au contour et contenant le domaine D. Considérons les cercles γ tangents en A au contour et passant par un autre point B de ce contour; lorsque B décrit C, les rayons de ces cercles sont bornés, puisque le rayon de courbure de C au point A est fini si, comme nous le supposerons, en chaque point de C la courbe a un contact simple avec sa tangente. Les rayons maximums des cercles γ sont fournis, comme on le voit aisément, par les cercles γ bitangents en A et B au contour. Nous prendrons pour R le maximum du rayon des cercles bitangents au contour maximum évidemment fini pour une courbe convexe ayant en chaque point un contact simple avec sa tangente. Soit alors α le centre du cercle de rayon R tangent en A; lorsque A décrit le contour, son centre décrit une courbe continue parallèle à C et α est une fonction continue de l'affixe z du point A. On a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

et

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-\alpha-(x-\alpha)} = \frac{1}{z-\alpha} + \frac{x-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}} + \ldots.$$

Supposons x à l'intérieur d'un domaine D_1, intérieur à D; on a pour tout point de D_1

$$\left|\frac{x-\alpha}{z-\alpha}\right| \leq k < 1$$

et la série uniformément convergente, dont le terme général est $\frac{(x-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}}f(z)$ peut être intégrée terme à terme. On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)(x-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x).$$

(1) PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1888).

La méthode de M. Hilbert.

La démonstration de M. Hilbert [1] s'applique à un domaine D, limité par une courbe simple quelconque C. Elle repose sur cette remarque qu'un contour simple quelconque peut être considéré comme la limite d'une suite de contours analytiques que nous appellerons des *lemniscates*, à l'intérieur de chacun desquels la fonction est développable en série de polynomes.

Soit $P(z)$ un polynome entier en z, de degré n; nous dirons que la courbe

$$|P(z)| = \text{const.}$$

est une lemniscate de degré n; si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines distinctes ou non du polynome, cette équation s'écrit

$$r_1 r_2 \ldots r_n = \text{const.} \qquad \text{avec} \qquad r_i = |z - a_i|.$$

Le cas de $n = 1$ nous donne le cercle, celui de $n = 2$, les ovales de Cassini.

Soit C_1 un contour simple situé à l'intérieur de D et sans point commun avec C. Nous supposerons que C_1 est contenu dans la région de D balayée par un cercle de rayon η dont le centre décrit C. Soit s la longueur de l'arc de C_1 compté à partir d'une origine fixe jusqu'au point z de ce contour, l la longueur totale de C_1. D'après les propriétés du potentiel, il est possible de trouver une fonction continue et positive $\varphi(s)$ telle que l'intégrale

$$V(\xi, \eta) = \int_0^l \varphi(s) \log r \, ds \qquad (x = \xi + i\eta;\ r = |z - x|),$$

dans laquelle x désigne un point quelconque du plan extérieur à C_1, prenne, lorsque x vient sur C_1, une valeur constante μ_1. Lorsque x est sur C, la fonction $V(\xi, \eta)$ a un maximum μ qui est supérieur à μ_1, puisque $V(\xi, \eta)$ est une fonction harmonique [2];

---

[1] HILBERT, *Ueber die Entwickelung einer beliebigen analytischen Function einer Variabeln in eine unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe* (*Göttinger Nachrichten*, 6 mars 1897).

[2] On sait que deux courbes $V(\xi, \eta) = \text{const}$ n'ont aucun point commun et que celle qui correspond à la plus petite valeur de la constante est à l'intérieur de l'autre.

soit ε un nombre positif assez petit pour que

$$\mu_1 + \varepsilon < \mu - \varepsilon.$$

Les deux courbes γ_1 et γ définies par les équations

$$V(\xi, \eta) = \mu_1 + \varepsilon,$$
$$V(\xi, \eta) = \mu - \varepsilon$$

sont situées dans l'anneau limité par C et C_1 et limitent un second anneau intérieur au premier. Faisons dans l'intégrale le changement de variable

$$u = \int_0^s \varphi(s)\, ds,$$

lorsque s croît de 0 à l, u croît de 0 à la valeur $\int_0^l \varphi(s) ds$ qu'on peut supposer égale à 1, car $\varphi(s)$ n'est définie qu'à un facteur constant près. On a alors

$$V(\xi, \eta) = \int_0^l \log r\, \varphi(s)\, ds = \int_0^1 \log r\, du$$
$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}(\log r_1 + \log r_2 + \ldots + \log r_n),$$

$r_1, r_2, \ldots, r_n$ étant les distances du point x, à n points de la courbe C_1, correspondant aux valeurs équidistantes $u_1, u_2, \ldots, u_n = 1$ de u. La convergence est d'ailleurs uniforme tant que x reste dans l'anneau $\gamma\gamma_1$; on peut donc prendre n assez grand pour que

$$-\varepsilon' < V - \frac{1}{n}\log(r_1 r_2 \ldots r_n) < +\varepsilon'.$$

Soit Γ la courbe définie par l'équation

$$\frac{1}{n}\log(r_1 r_2 \ldots r_n) = \lambda ;$$

on aura, sur cette courbe,

$$\mu_1 + \varepsilon < \lambda - \varepsilon' < V < \lambda + \varepsilon' < \mu - \varepsilon,$$

si $\mu_1 + \varepsilon < \lambda < \mu - \varepsilon$ et si ε' est assez petit. La courbe Γ est une

lemniscate, puisqu'on a

$$r_1 r_2 \ldots r_n = c^{n\lambda},$$

et cette lemniscate est contenue dans l'anneau $\gamma\gamma_1$.

Prenons successivement pour η la suite des nombres

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{i}, \quad \ldots,$$

on définira ainsi des lemniscates $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots$ qui ont pour limite C; on peut d'ailleurs extraire de cette suite de courbes une suite nouvelle telle que le domaine intérieur à chaque Γ_i soit contenu dans le domaine intérieur à Γ_{i+1} et que Γ_i et Γ_{i+1} n'aient aucun point commun.

Nous allons maintenant démontrer la possibilité de représenter par la somme d'une série de polynomes, une fonction holomorphe dans le domaine fermé Δ, limité par une lemniscate Γ. Nous nous servirons d'un procédé de calcul dû à Jacobi [1] qui nous conduira au but par une voie plus simple que celle suivie par M. Hilbert.

Soit

$$|P(z)| = \text{const}$$

l'équation de Γ; on a

$$\frac{P(z) - P(x)}{z - x} = \varphi(z, x),$$

où $\varphi(z, x)$ est un polynome entier en x et z de degré $n - 1$ par rapport à chaque variable, P étant supposé de degré n. Lorsque z est sur Γ et x dans le domaine Δ_1 intérieur à Δ, on a

$$|\varphi(z, x)| < M_1.$$

Tirons $\frac{1}{z - x}$ de la relation précédente et portons la valeur obtenue dans la formule de Cauchy; il vient

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)\varphi(z, x)}{P(z) - P(x)} dz,$$

or

$$\frac{1}{P(z) - P(x)} = \frac{1}{P(z)} + \frac{P(x)}{[P(z)]^2} + \ldots + \frac{[P(x)]^p}{[P(z)]^{p+1}} + \ldots,$$

---

[1] Jacobi, *Ueber Reihen Entwickelungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynom fortschreiten und zu Koefficienten, Polynome eines niedrigen Grades haben* (*Journal de Crelle*, t. 53, p. 103).

et cette série est uniformément convergente lorsque z étant un point quelconque de Γ, x est un point quelconque de Δ_1, car

$$\left|\frac{P(x)}{P(z)}\right| < k < 1;$$

la série $\frac{f(z)\varphi(z,x)}{P(z)-P(x)}$ est aussi uniformément convergente et par suite intégrable terme à terme; on a donc

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} [P(x)]^p \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)\varphi(z,x)}{[P(z)]^{p+1}}\,dz,$$

mais $\varphi(z,x)$ étant un polynome de degré $(n-1)$ en x, il en est de même de l'intégrale

$$Q_p(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)\varphi(z,x)}{[P(z)]^{p+1}}\,dz;$$

on en déduit

$$(1)\qquad f(x) = Q_0(x) + Q_1(x)P(x) + \ldots + Q_p(x)[P(x)]^p + \ldots,$$

série uniformément convergente dans Δ_1 et Δ_1 est aussi voisin de Δ qu'on le veut.

Soit maintenant C, une courbe simple limitant le domaine D à l'intérieur duquel $f(x)$ est holomorphe : on ne suppose rien sur la manière dont $f(x)$ se comporte sur C. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots$ les lemniscates définies précédemment et ayant pour limite C; Δ_i le domaine limité par Γ_i, Δ_{i-1} est tout entier dans Δ_i. Dans Δ_n, $f(x)$ est représentable par une série uniformément convergente de polynomes; on peut prendre assez de termes dans cette série pour que leur somme $P_n(x)$ diffère de $f(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$ en module

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

La suite

$$P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_n(x),\quad \ldots$$

a pour limite $f(x)$ dans D et converge uniformément à l'intérieur de D. En effet, soit Δ un domaine quelconque à l'intérieur de D et sans point commun avec C; pour i assez grand, Δ_i contient Δ, et il

en sera de même de Δ_n pour $n > \nu$. On aura donc

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad n > \nu$$

pour tous les points de Δ.

Remarques sur l'interpolation de Lagrange.

La méthode de M. Hilbert est liée aux polynomes d'interpolation. Soit en effet

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n);$$

appelons $H_p(x)$ la somme des $p+1$ premiers termes de la série (1), la différence $f(x) - H_p(x)$ contient $[P(x)]^{p+1}$ en facteur; donc cette différence et ses p premières dérivées s'annulent aux points a_1, a_2, …, a_n. $H_p(x)$ prend en ces points les mêmes valeurs que $f(x)$ et les $(p+1)$ premières dérivées de $H_p(x)$, prennent les mêmes valeurs que les dérivées de même rang de $f(x)$. D'ailleurs le degré de $H_p(x)$ est $n(p+1) - 1$; $H_p(x)$ est donc le polynome de moindre degré satisfaisant aux conditions précédentes, c'est le polynome fourni par la formule de Lagrange généralisée.

Proposons-nous d'une manière générale de déterminer un polynome $H(x)$ de degré

$$h = \sum_{i=1}^{i=n} (q_i + 1) - 1$$

tel qu'au point a_i, $H(x)$ et ses q_i premières dérivées soient respectivement égaux à $f(x)$ et à ses q_i premières dérivées. Ce polynome nous sera donné par la formule (¹)

$$H(x) = f(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)(x-a_1)^{q_1+1}\ldots(x-a_n)^{q_n+1}}{(z-x)(z-a_1)^{q_1+1}\ldots(z-a_n)^{q_n+1}}\,dz.$$

L'intégrale est étendue à un contour C dans lequel $f(z)$ est régulière et contenant les points x, a_1, …, a_n. Cette intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction à intégrer en chacun des $n+1$ pôles x, a_1, …, a_n; le résidu au point x est $f(x)$, et,

(¹) HERMITE, *Sur la formule de Lagrange* (*Journal de Crelle*, t. 84).

pour le résidu au point a_i, un calcul aisé conduit à la valeur

$$-\left[f(a_i)+\frac{(x-a_i)}{1}f'(a_i)+\ldots+\frac{(x-a_i)^{\alpha_i}}{\alpha_i!}f^{(\alpha_i)}(a_i)\right]$$
$$\times\left(\frac{x-a_1}{a_i-a_1}\right)^{\alpha_1+1}\cdots\left(\frac{x-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}}\right)^{\alpha_{i-1}+1}\left(\frac{x-a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}}\right)^{\alpha_{i+1}+1}\cdots\left(\frac{x-a_n}{a_i-a_n}\right)^{\alpha_n+1};$$

on en déduit

$$\Pi(x)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x-a_1}{a_i-a_1}\right)^{\alpha_1+1}\cdots\left(\frac{x-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}}\right)^{\alpha_{i-1}+1}\left(\frac{x-a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}}\right)^{\alpha_{i+1}+1}\cdots$$
$$\times\left(\frac{x-a_n}{a_i-a_n}\right)^{\alpha_n+1}\left[f(a_i)+\frac{(x-a_i)}{1}f'(a_i)+\ldots+\frac{(x-a_i)^{\alpha_i}}{\alpha_i!}f^{(\alpha_i)}(a_i)\right]$$

et $\Pi(x)$ est bien un polynome de degré h satisfaisant aux conditions imposées.

Pour le polynome $\Pi_p(x)$ introduit précédemment, on aura

$$f(x)-\Pi_p(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-x}\left[\frac{P(x)}{P(z)}\right]^{p+1}dz,$$

et par conséquent, lorsque x est dans Δ_1 et z sur Γ, on aura

$$|f(x)-\Pi_p(x)|<Hk^{p+1};$$

H est un nombre fixe et k le nombre inférieur à 1, introduit plus haut.

Cette inégalité démontre la convergence vers $f(x)$ des polynomes d'interpolation introduits dans la méthode de M. Hilbert et nous fournit une nouvelle démonstration remplaçant le procédé de calcul de Jacobi.

Dans l'exemple précédent, les points d'interpolation sont choisis sur le contour Γ et demeurent fixes; seul, le nombre des dérivées connues en ces points augmente indéfiniment de sorte que la connaissance des développements de Taylor aux points a_i suffit pour le calcul de $\Pi_p(x)$, quel que soit p. Dans ce cas les polynomes d'interpolation convergent vers la fonction $f(x)$.

Mais on peut aussi faire l'interpolation en faisant varier le nombre des a_i et les valeurs des α_i, alors les polynomes d'interpolation ne fournissent pas toujours une approximation indéfinie pour une fonction analytique, même dans un domaine restreint entourant les points d'interpolation. Il est clair en effet que si la fonction $f(x)$ a un point singulier dans un domaine D, quel que soit le

mode d'interpolation qu'on adopte en prenant les valeurs a_i sur le contour, les polynomes d'interpolation ne pourront converger uniformément sur le contour, puis qu'ils devraient alors converger uniformément à l'intérieur de D vers une fonction holomorphe. Voici un exemple très simple dû à M. Méray [1] et dans lequel le calcul des polynomes d'interpolation est immédiat. Prenons la fonction $\frac{1}{x}$ dans le cercle de rayon 1 et de centre origine, et interpolons sur la circonférence de ce cercle. Nous prendrons comme points d'interpolation les sommets d'un polygone régulier de n côtés dont un sommet est le point 1, et nous déterminerons un polynome $\Pi_n(x)$ de degré $n-1$, qui soit égal à $\frac{1}{x}$ en ces sommets. Ce polynome est évidemment x^{n-1}, puisqu'on a

$$x^{n-1} = \frac{1}{x}$$

aux points considérés dont les affixes vérifient $x^n - 1 = 0$. Il est manifeste que les polynomes x^{n-1} n'ont aucune limite sur la circonférence.

Dans l'exemple qui précède la fonction à interpoler a un point singulier dans le domaine D et les a_i sont choisis sur la frontière de ce domaine, mais la fonction $f(x)$ peut être régulière dans D et les a_i pris à l'intérieur du domaine, sans que les polynomes d'interpolation fournissent une approximation indéfinie. Considérons avec M. Runge [2] une fonction analytique dans un domaine D contenant à l'intérieur le segment $(-1, +1)$ de l'axe des ξ et supposons $f(x)$ régulière dans D. Nous prendrons les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sur le segment $(-1, +1)$ et nous supposerons que $\Pi_n(x)$ de degré $n-1$ coïncide avec $f(x)$ en ces n points; en outre, les points a_i diviseront le segment en parties égales. On a, en posant

$$P_n(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n),$$

$$f(x) - \Pi_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,P_n(x)}{(z-x)\,P_n(z)}\,dz,$$

---

(1) MÉRAY, *Observations sur la légitimité de l'interpolation* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, 1884, p. 165).

(2) RUNGE, *Ueber empirische Funktionen und die Interpolation zwischen æquidistanten Ordinaten* (*Zeitschrift für Math. und Physik*, t. XLVI, 1901, p. 229).

le contour C limitant le domaine D. Cherchons à calculer la limite de $\sqrt[n]{|P_n(x)|}$ lorsque n croît indéfiniment. On a

$$\log \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{\log r_1 + \log r_2 + \ldots + \log r_n}{n} \qquad (r_i = |x - a_i|)$$

et lorsque n croît indéfiniment, cette expression a pour limite la valeur moyenne de la fonction $\log r$, $(r = |x - \xi|)$, dans l'intervalle $(-1, +1)$, c'est-à-dire

$$U = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \log r \, d\xi,$$

un calcul facile conduit pour cette expression à la valeur

$$U = \frac{1}{2}[(1+\xi)\log r + (1-\xi)\log r' + (\alpha' - \alpha)\eta] - 1,$$

où $x = \xi + i\eta$ et (r, α), (r', α') sont respectivement les modules et les arguments de $(x+1)$ et $(x-1)$. Les courbes $U =$ const. sont des courbes d'égal potentiel logarithmique pour une masse homogène étendue sur le segment $(-1, +1)$ [1].

Parmi ces courbes, celle qui correspond à la valeur $U_0 = \log 2 - 1$ passe par les points -1 et $+1$; elle est représentée sur la figure 4 avec les courbes

$$U = \log 1{,}8 - 1, \qquad U = \log 1{,}6 - 1,$$
$$U = \log 1{,}4 - 1, \qquad U = \log 1{,}2 - 1.$$

Supposons $f(x)$ régulière dans la courbe $U = U_1$, je dis que $\mathrm{H}_{n-1}(x)$ a pour limite $f(x)$, en tout point intérieur à U_1 et en particulier sur le segment $(-1, +1)$, si $U_1 > U_0$; en effet.

---

[1] Pour le calcul de U, on peut aussi remarquer que

$$\log \sqrt[n]{P_n(x)} = \frac{\log(x - a_1) + \log(x - a_2) + \ldots + \log(x - a_n)}{n},$$

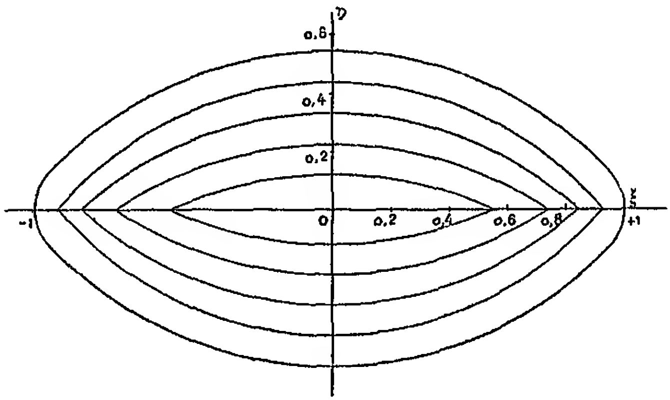
en prenant, par exemple, pour chaque logarithme, sa détermination principale; cette expression a pour limite

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \log(x - \xi)\, d\xi = \frac{1}{2}[(1+x)\log(1+x) - (x-1)\log(x-1)] - 1,$$

et U est la partie réelle de cette limite.

supposons que C soit une courbe U, extérieure à U_1 et aussi voisine d'elle qu'on le voudra, sans avoir de point commun avec elle; $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ a pour limite e^U, si z est sur C et $\sqrt[n]{|P_n(x)|}$ a pour

Fig. 1



limite e^{U_1}; pour n assez grand, $\sqrt[n]{\left|\dfrac{P_n(x)}{P_n(z)}\right|}$ est très voisin du nombre $e^{U_1-U} < 1$; on a donc à partir d'une certaine valeur de n

$$\left|\frac{P_n(x)}{P_n(z)}\right| < k^n \qquad (0 < k < 1);$$

l'intégrale $\displaystyle\int \frac{f(z)P_n(x)}{(z-x)P_n(z)}\,dz$ tend donc vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$ [1].

Si $f(x)$ a des points singuliers dans le domaine U_1, soit U_2 la courbe U qui passe par un de ces points et qui n'en contient aucun à l'intérieur, ($f(x)$ est supposée régulière sur le segment $(-1, +1)$). Les polynomes $\Pi_n(x)$ convergent vers $f(x)$, à l'intérieur de U_2, mais divergent en général à l'extérieur. Prenons par exemple le cas où $f(x)$ a sur U_2 un pôle simple α. L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,\frac{P_n(x)}{P_n(z)}\,dz$$

étendue à une courbe U, extérieure à U_2, mais assez voisine d'elle

(1) La convergence des $\Pi_n(x)$ vers $f(x)$ lorsque les a_i sont équidistants sur le segment $(-1, +1)$ avait déjà été démontrée par Heine [*Einige Anwendungen der Residuenrechnung* (*Journal de Crelle*, t. LXXXIX, 1818)].

pour que $f(x)$ n'ait à l'intérieur d'autre point singulier que α; cette intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction à intégrer, aux points x, a_1, a_2, ..., a_n et α. Les premiers pôles fournissant la différence $f(x) - \Pi_n(x)$, on a donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,P_n(x)}{(z-x)\,P_n(z)}\,dz = f(x) - \Pi_n(x) - \frac{A}{(x-\alpha)}\,\frac{P_n(x)}{P_n(\alpha)},$$

A étant le résidu de $f(x)$ en α; le premier membre tend vers zéro quand x est dans U, car $\sqrt[n]{\left|\frac{P_n(x)}{P_n(z)}\right|}$ a pour limite $e^{U_1-U} < 1$, d'autre part $\sqrt[n]{\left|\frac{P_n(x)}{P_n(\alpha)}\right|}$ tend vers $e^{U_1-U_2}$ qui est inférieur à 1 si x est dans U_2 et supérieur à 1 si x est entre U_2 et U_1. Donc la différence $f(x) - \Pi_n(x)$ ne converge vers zéro que pour les points x contenus dans U_2.

On voit donc que, en général, lorsqu'on interpole sur un segment de $O\xi$, la convergence vers $f(x)$ des polynomes d'interpolation n'est assurée que pour la portion de ce segment qui est à l'intérieur de la première courbe U passant par un point singulier de $f(x)$.

Prenons comme autre exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ qui a les deux pôles $+i$ et $-i$. L'intégrale précédente, prise le long d'un contour C contenant les points $\pm i$, est nulle, puisqu'on peut agrandir indéfiniment ce contour sans changer la valeur de l'intégrale. On a donc

$$\Pi_n(x) - f(x) = R_1 + R_2,$$

R_1 et R_2 étant les résidus aux points $\pm i$ de la fonction

$$\frac{P_n(x)}{(1+z^2)(z-x)P_n(z)}.$$

Or

$$R_1 = -\frac{1}{2(1+ix)}\,\frac{P_n(x)}{P_n(i)}, \qquad R_2 = -\frac{1}{2(1-ix)}\,\frac{P_n(x)}{P_n(-i)}.$$

Supposons, par exemple, les points a_i deux à deux symétriques par rapport à l'origine, on aura

$$P_n(i) = P_n(-i)$$

et

$$f(x) - \Pi_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\,\frac{P_n(x)}{P_n(i)}.$$

Si x est à l'extérieur de la courbe U_i qui passe par les points $\pm i$, le second membre augmente indéfiniment; il tend vers zéro lorsque x est dans U_i. Par exemple, si l'on prend comme segment d'interpolation (1) le segment $(-5, +5)$, la courbe U_i coupe $O\xi$ aux points d'abscisses $\pm 3,63\ldots$, la convergence a lieu à l'intérieur de ce dernier segment, mais n'a pas lieu pour les points dont l'abscisse a une valeur absolue comprise entre $3,63\ldots$ et 5 (2).

La méthode de M. Runge.

M. Runge s'est proposé la question suivante : La région d'existence d'une fonction analytique uniforme est-elle soumise à des restrictions autres que celle d'être d'un seul tenant, ou bien une région d'un seul tenant mais arbitraire peut-elle être choisie comme région d'existence d'une fonction uniforme? Nous appellerons ici *région d'existence* l'ensemble des points réguliers et des pôles de la fonction; la frontière est formée par les points singuliers autres que des pôles; dans cette région, la fonction définie par un de ses éléments peut être prolongée en tous les points. Dans son

---

(1) Lorsqu'on substitue le segment $(-a, +a)$ au segment $(-1, +1)$, les nouvelles courbes limites sont homothétiques des anciennes; si l'on pose

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \log r\, d\xi, \qquad U'(\xi, \eta) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} \log r\, d\xi,$$

on trouve

$$U'(\xi, \eta) = U\left(\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{a}\right) + 2\log a$$

(2) Dans une Note du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XX, 1896, p. 266 (*Nouveaux exemples d'interpolations illusoires*), M. Méray avait déjà utilisé le calcul des résidus dans l'exemple précédent et pour le cas où $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Lorsque $f(x)$ est une fraction rationnelle dont le degré du dénominateur surpasse de 2 au moins celui du numérateur, on voit que, l'intégrale s'évanouissant pour un contour infini, on a l'expression de la différence $f(x) - \Pi_n(x)$ par le calcul des résidus aux pôles fixes du dénominateur de $f(x)$. Dans les exemples de M. Méray, la convergence des polynomes Π_n vers $f(x)$ n'a pas lieu, à cause du choix particulier des a_i qui ne sont pas équidistants sur le segment d'interpolation.

Pour ce qui concerne l'interpolation des fonctions réelles, on consultera avec fruit le Chapitre que M. Borel lui a consacré dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 74.

Mémoire [1], M. Runge a établi les résultats suivants : *Dans sa région d'existence* D, *une fonction uniforme peut être représentée par la somme d'une série de fractions rationnelles; réciproquement, étant donnée une région quelconque d'un seul tenant* D, *il est possible de définir une série de fractions rationnelles dont la somme soit une fonction uniforme dont la région d'existence est* D. Nous démontrerons ici la première de ces propositions et nous verrons qu'on peut en déduire facilement la possibilité de représenter la fonction par la somme d'une série de polynomes, dans tout domaine limité par un seul contour à l'intérieur duquel elle est régulière.

Prenons d'abord le cas le plus simple d'une fonction $f(x)$ régulière dans le domaine fermé D, limité par le contour rectifiable C : je vais montrer qu'on peut remplacer l'intégrale de Cauchy par une série de fractions rationnelles possédant les mêmes propriétés que cette intégrale, c'est-à-dire ayant pour somme $f(x)$ à l'intérieur de D et zéro à l'extérieur. Soit D′ un domaine intérieur à D et sans point commun avec lui, δ la plus courte distance des deux frontières. On a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

cette intégrale est la limite pour $p=\infty$ de la somme

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{f(z_k)(z_{k+1}-z_k)}{z_k-x} = g_p(x),$$

en désignant par $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}, z_p = z_0$ des points consécutifs de la courbe C et tels que la distance qui sépare deux points voisins ait pour limite o avec $\frac{1}{p}$. On peut écrire

$$g_p(x) = \sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{2i\pi}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\frac{f(z_k)\,dz}{z_k-x}$$

et

$$f(x)-g_p(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{k=0}^{k=p-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left[\frac{f(z)}{z-x}-\frac{f(z_k)}{z_k-x}\right]dz.$$

[1] Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (*Acta mathematica*, t. VI, 1885, p. 229).

Si z reste sur C et x dans D′, la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$ des deux variables z et x est continue par rapport à l'ensemble des deux variables; elle est donc uniformément continue, c'est-à-dire qu'on peut prendre le plus grand des arcs $z_k z_{k+1}$ assez petit pour que, z étant un point de cet arc, on ait, quel que soit k et quel que soit x dans D′,

$$\left|\frac{f(z)}{z-x} - \frac{f(z_k)}{z_k - x}\right| < \varepsilon,$$

on en déduit

$$|f(x) - g_p(x)| < \frac{l\varepsilon}{2\pi},$$

l étant la longueur de la courbe C. Donc, lorsque p augmente indéfiniment, $g_p(x)$ a pour limite $f(x)$. Soit D″ un domaine extérieur à D et sans point commun avec lui; le même raisonnement prouverait que la suite $g_p(x)$ a pour limite la valeur de l'intégrale c'est-à-dire zéro, lorsque x est dans D″. Soit alors D'_1, D'_2, ... D'_n ..., une suite de domaines emboîtés ayant pour limite D et D''_1, D''_2, ..., D''_n, ... une suite de domaines emboîtés ayant pour limite l'extérieur de D. On peut trouver une fraction rationnelle $g_n(x)$, telle que

$$|f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{dans } D'_n,$$

$$|g_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{dans } D''_n.$$

La série

$$g_1(x) + [g_2(x) - g_1(x)] + \ldots + [g_n(x) - g_{n-1}(x)] + \ldots$$

converge vers $f(x)$ dans D et vers zéro à l'extérieur de D; la convergence est uniforme dans tout domaine D′ intérieur au domaine ouvert D, et dans tout domaine D″ extérieur au domaine fermé D. Remarquons que les pôles des termes de la série sont tous situés sur C.

Si le domaine D était limité par plusieurs contours, le raisonnement serait applicable au contour total C et l'on arriverait aux mêmes conclusions.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général d'un domaine D quelconque, mais d'un seul tenant, qui pourra être le domaine d'existence de $f(x)$ et dans lequel cette fonction pourra avoir des

pôles. Nous nous proposons de montrer que, dans D, $f(x)$ peut être représentée par la somme d'une série de fractions rationnelles. On peut toujours supposer que D ne contient pas le point à l'infini, car si la fonction $f(x)$ était régulière à l'infini, ou y admettait un pôle, il suffirait de faire la transformation

$$x = x_0 + \frac{1}{x'},$$

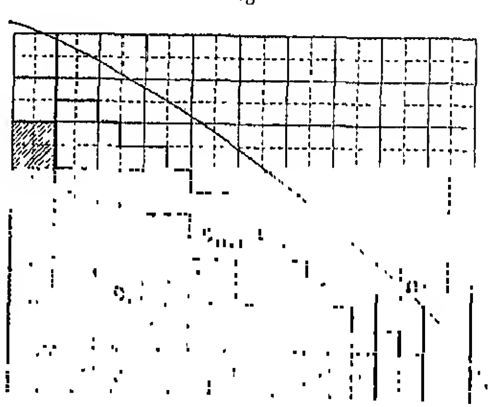
x_0 étant un point singulier de $f(x)$ et la fonction

$$f_1(x') = f\left(x_0 + \frac{1}{x'}\right)$$

aurait un point singulier à l'infini. Si l'on peut représenter $f_1(x')$ par une série de fonctions rationnelles en x', la substitution de $\frac{1}{x - x_0}$ à x' nous permettra de représenter $f(x)$ par une série de fractions rationnelles en x. Nous admettrons donc que tous les points de D sont à distance finie.

Considérons un carré Γ_n dont les côtés, parallèles aux axes $O\xi$, $O\eta$, ont pour longueur 2^n; par des parallèles à ces côtés, équidistantes de $\frac{1}{2^n}$, partageons-le en 2^{4n} petits carrés égaux γ_n. Soit D_n

Fig. 2.



l'ensemble de tous les carrés γ_n qui sont à l'intérieur de D et tels que les huit carrés γ adjacents à chacun d'eux soient aussi intérieurs à D (*fig.* 2). Si l'on donne à n les valeurs des nombres naturels, on obtient ainsi une suite de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n \ldots$ qui ne

seront pas, en général, d'un seul tenant. Je dis que chacun de ces domaines contient le précédent et que tout point du domaine ouvert D appartient à D_n à partir d'une certaine valeur de n. D'abord D_n existe à partir d'un certain rang, montrons que D_{n+1} contient D_n; soit γ_n un petit carré appartenant à D_n, il est formé par la réunion de quatre des carrés γ_{n+1} qui servent à la définition de D_{n+1}; chacun de ces quatre carrés γ_{n+1} appartient à D_{n+1}, puisque ce carré ainsi que les huit carrés γ_{n+1} adjacents sont contenus dans le carré formé par γ_n et ses huit adjacents, lequel appartient à D. D'ailleurs les carrés γ'_{n+1} qui bordent γ_{n+1} appartiennent aussi à D_{n+1} pour la même raison : il en résulte que les frontières de D_n et de D_{n+1} sont séparées par une bande formée de carrés tels que γ'_{n+1}. Soit maintenant un point P de D, et α un nombre assez petit pour que le carré de centre P et de côtés 2α parallèles aux axes soit tout entier à l'intérieur de D; pour n assez grand, P est dans Γ_n et, si α est supérieur au double de $\frac{1}{2^n}$, ce point P appartiendra à un carré γ_n qui sera, comme les huit carrés γ_n adjacents, intérieur à D; P appartiendra alors à D_n.

Dans le domaine ouvert D_n, la fonction $f(x)$ est méromorphe; elle a un nombre fini de pôles $a_1, a_2, \ldots, a_p$; soit

$$\frac{A_k^1}{x-a_k}+\frac{A_k^2}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{A_k^{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}$$

la partie principale relative au pôle a_k et $r_n(x)$, la somme de ces parties principales. La fonction

$$\varphi_n(x)=f(x)-r_n(x)$$

est régulière dans le domaine D_n. Nous pourrons donc trouver une fraction rationnelle dont les pôles sont sur la frontière de D_n et telle que pour tout point x de D_{n-1} on ait

$$|\varphi_n(x)-g_n(x)|<\frac{1}{n}$$

où, en posant

$$G_n(x)=g_n(x)+r_n(x),$$

$$|f(x)-G_n(x)|<\frac{1}{n}$$

pour tous les points de D_{n-1}, qui ne sont pas des pôles de f
La série

$$G_1(x) + [G_2(x) - G_1(x)] + \ldots + [G_n(x) - G_{n-1}(x)] + \ldots$$

converge vers $f(x)$ en tout point de D, qui est régulier pour f
En un pôle de $f(x)$, un terme de la série et un seul posséd
pôle avec la même partie principale que $f(x)$, car si D_n e
premier domaine contenant le pôle a, les fractions rationnelles
G_{n-1}, ..., ont toutes le pôle a, avec la même partie princi
que $f(x)$ et le terme $G_n - G_{n-1}$ de la série est le seul qui pos
le pôle a avec précisément la même partie principale que $f(x)$
fonction $f(x)$ est donc représentée dans D par la somme d
série de fractions rationnelles [1].

Ces fractions rationnelles ont à l'intérieur de D d'autres p
que ceux de $f(x)$, ce sont les pôles des fonctions $g_n(x)$ si
sur les frontières C_n des domaines D_n; en chacun d'eux, il s
de supprimer dans la série des $G_n(x)$ le terme qui admet ce p
comme pôle pour obtenir une suite convergeant vers $f(x)$;

---

(1) Voici une remarque qui nous sera utile : on peut choisir $g_n(x)$ de ma
que

$$|\varphi_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{dans } D_{n-1}$$

et

$$|g_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{à l'extérieur de } D_{n+1};$$

déterminons de même une fraction rationnelle $\rho_n(x)$ telle que

$$|r_n(x) - \rho_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{à l'extérieur de } D_{n+1}$$

et

$$|\rho_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad \text{dans } D_{n-1},$$

ce qui est possible puisque $r_n(x)$ est régulière à l'extérieur de D_n; alors, en po

$$R_n(x) = g_n(x) + r_n(x) - \rho_n(x),$$

on aura

$$|f(x) - R_n(x)| < \frac{2}{n} \qquad \text{dans } D_{n-1},$$

$$|R_n(x)| < \frac{2}{n} \qquad \text{à l'extérieur de } D_{n+1},$$

et la suite des fonctions rationnelles $R_n(x)$ convergera vers $f(x)$ dans D et
zéro à l'extérieur de D.

revient à remplacer par leur somme deux termes consécutifs de la série. Il y a là un inconvénient auquel M. Runge a remédié en substituant aux fractions rationnelles $G_n(x)$ d'autres fractions dont les pôles qui n'appartiennent pas à $f(x)$ sont situés sur la frontière C du domaine D.

La transformation repose sur le lemme suivant : *Soit une fraction rationnelle* $G(x)$ *ayant le seul pôle* a, *on peut construire une fraction rationnelle* $H(x)$ *ayant le seul pôle* b *choisi arbitrairement dans le plan, et différant de* $G(x)$ *de moins de* ε *pour tous les points extérieurs à une bande entourant un chemin unissant* a *et* b *et dont l'épaisseur est aussi petite qu'on le veut.* Soit, en effet, c une courbe joignant les points a et b, et d le domaine balayé par un cercle de rayon δ dont le centre décrit c. Prenons sur cette courbe c les points $a, a_1, a_2, \ldots, a_r = b$, tels que la distance de deux points consécutifs ne dépasse pas $k\delta$ $(k < 1)$. On a

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{a-a_1}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{(a-a_1)^{p-1}}{(x-a_1)^p} + \left(\frac{a-a_1}{x-a_1}\right)^p \frac{1}{x-a};$$

x étant supposé à l'extérieur de d, la fraction rationnelle $s(x)$ formée par la somme des p premiers termes de ce développement diffère de $\frac{1}{x-a}$ de moins de $\frac{1}{\delta}k^p$ en valeur absolue, quelle que soit la valeur de x extérieure à d : pour p assez grand la fraction $s(x)$ différera de $\frac{1}{x-a}$ d'aussi peu qu'on voudra. De même, on a

$$\frac{1}{(x-a)^h}\left[1 - \left(\frac{a-a_1}{x-a_1}\right)^p\right]^h = [s(x)]^h,$$

et pour p assez grand, le second membre diffère de $\frac{1}{(x-a)^h}$ d'aussi peu qu'on le veut. On peut donc remplacer tous les éléments simples de $G(x)$ par des fractions rationnelles ayant le seul pôle a_1, de manière que leur somme $H_1(x)$ diffère de $G(x)$ de moins de $\frac{\varepsilon}{r}$ en module. De même, on construira une fraction rationnelle $H_2(x)$ ayant le seul pôle a_2 et différant de $H_1(x)$ de moins de $\frac{\varepsilon}{r}$ en module, etc.; on arrivera ainsi à une fraction $H(x)$, ayant le seul pôle b, différant de $H_{r-1}(x)$ de moins de $\frac{\varepsilon}{r}$, et par conséquent de $G(x)$, de moins de ε.

On peut d'ailleurs, dans $H(x)$, remplacer le pôle multiple b par des pôles simples voisins. Soient en effet $b_1, b_2, \ldots, b_h$ des points voisins de b, la fraction

$$\frac{1}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_h)}$$

a pour limite $\frac{1}{(x-b)^h}$ quand les b_i tendent vers b, ce qui permet de substituer cette fraction à $\frac{1}{(x-b)^h}$ avec l'approximation qu'on voudra.

Nous avons supposé le point b à distance finie; supposons maintenant que ce soit le point à l'infini : on fera la transformation

$$x = \frac{1}{x_1 - b_1},$$

b_1 étant un point quelconque, qui remplace la fraction $G(x)$ par la fraction $G_1(x_1)$ ayant l'unique pôle

$$a_1 = b_1 + \frac{1}{a}$$

(on peut toujours supposer que a n'est pas nul). La fonction $G_1(x_1)$ peut être remplacée par la fraction $H_1(x_1)$ ayant le seul pôle b_1 et la transformation inverse nous donnera un polynome entier $H(x)$.

Appliquons ce lemme à la fraction $g_n(x)$ dont les pôles sont sur C_n. Soit a un de ces pôles; je peux le joindre à un point b de C sans traverser D_{n-1}; en effet, si les carrés de D_{n-1} enveloppaient a de toutes parts, il y aurait nécessairement dans l'aire ainsi entourée, des points de C auxquels je pourrai le joindre, sinon tous les points de cette aire appartiendraient à D, donc à D_{n-1}, ce qui est impossible puisque a n'appartient pas à D_{n-1}. Je peux donc remplacer $g_n(x)$ par une fraction $h_n(x)$ dont les pôles sont sur C et qui, à l'intérieur de D_{n-1} diffère de $g_n(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$. Alors, si

$$H_n(x) = r_n(x) + h_n(x),$$

on aura

$$|f(x) - H_n(x)| < \frac{2}{n}$$

pour tout point de D_{n-1}, qui n'est pas un pôle de $f(x)$. La série

$$H_1(x) + [H_2(x) - H_1(x)] + \ldots + [H_n(x) - H_{n+1}(x)] + \ldots$$

a pour somme $f(x)$ en tous les points réguliers de D : en un pôle, un terme de la série et un seul devient infini et sa partie principale est précisément celle de ce pôle dans $f(x)$.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ soit régulière dans D et que le domaine extérieur à D soit d'un seul tenant : on peut joindre chaque point de C, à un même point α, extérieur à D, par des lignes ne traversant pas D, et remplacer chaque fraction $H_n(x)$ par une fraction $P_n\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$ ayant le seul pôle α. La fonction $f(x)$ sera alors représentée par une série de polynomes en $\frac{1}{x-\alpha}$ qui convergera uniformément à l'intérieur de D. Si, en particulier, on prend le point α à l'infini, on représentera la fonction par la somme d'une série de polynomes entiers en x.

Remarques sur les développements de M. Appell.

Les résultats précédents peuvent être rattachés à une autre méthode que M. Appell a fait connaître en 1882, pour représenter par des séries de fractions rationnelles les fonctions holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercle (¹).

Soit D un domaine dont le contour C est formé par p arcs de cercle $C_1, C_2, \ldots, C_p$, ayant pour centres les points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et tournant tous leur convexité vers l'intérieur du domaine; supposons en outre qu'aucun point du domaine ouvert D n'appartienne à l'un de ces cercles : x étant un point intérieur à D et $f(x)$ régulière dans ce domaine, on a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \frac{1}{2i\pi}\sum_{k=1}^{k=p}\int_{C_k}\frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Supposons que x reste à l'intérieur d'un domaine D′ intérieur à D, on aura, quel que soit k,

$$\left|\frac{z-x_k}{x-x_k}\right| < \eta \qquad (\eta < 1).$$

(¹) Voir *Acta mathematica*, t. I, 1882, et *Développements en séries d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle* (*Math. Annalen*, Bd. XXI, 1883, p. 118).

Or

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x_k-(x-x_k)}$$
$$= -\frac{1}{x-x_k} - \frac{z-x_k}{(x-x_k)^2} - \ldots - \frac{(z-x_k)^{q-1}}{(x-x_k)^q} - \ldots,$$

en intégrant terme à terme la série uniformément convergente obtenue en multipliant par $\frac{f(z)}{2i\pi}$ les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k}\frac{f(z)\,dz}{z-x} = \frac{A_k^1}{x-x_k} + \frac{A_k^2}{(x-x_k)^2} + \ldots + \frac{A_k^q}{(x-x_k)^q} + \ldots$$

où

$$A_k^q = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k} f(z)(z-x_k)^{q-1}\,dz;$$

en répétant ce calcul pour toutes les valeurs de k, on obtient

$$f(x) = \sum_{q=1}^{q=\infty}\left[\frac{A_1^q}{(x-x_1)^q} + \frac{A_2^q}{(x-x_2)^q} + \ldots + \frac{A_p^q}{(x-x_p)^q}\right]$$

et $f(x)$ est représentée par une somme d'une série de fractions rationnelles, convergente pour toute valeur de x intérieure à D, les seuls pôles des fractions étant les points $x_1, x_2, \ldots x_p$ extérieurs à D (1). La convergence de cette série est uniforme lorsque x est dans le domaine D'; en effet le module de l'erreur commise, en s'arrêtant au $q^{\text{ième}}$ terme du développement de $\frac{1}{z-x}$, par rapport aux puissances de $\frac{1}{x-x_k}$, est celui de l'expression

$$\left(\frac{z-x_k}{x-x_k}\right)^q \frac{1}{z-x}$$

et en s'arrêtant au $q^{\text{ième}}$ terme de la série qui représente l'intégrale prise le long de C_k, le module de l'erreur est celui de

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k}\frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{z-x_k}{x-x_k}\right)^q dz,$$

(1) Le même raisonnement prouve que la série est convergente et a pour somme zéro pour tous les points extérieurs à D et à tous les cercles.

qui est inférieur à $M\eta^q$, M étant un nombre fixe, indépendant de q et de x; donc, en s'arrêtant au $q^{\text{ième}}$ terme de la série qui donne $f(x)$, on commet une erreur dont la valeur absolue ne dépasse pas $M'\eta^q$.

Supposons que D soit limité par un seul contour et prenons d'abord assez de termes dans la série pour qu'on ait, x étant dans D',

$$|f(x) - R_n(x)| < \frac{1}{n},$$

$R_n(x)$ étant la somme des termes qu'on a pris; R est une fraction rationnelle dont les pôles sont les points x_k. Le domaine D étant limité par un seul contour, on peut joindre les points x_k au point à l'infini par des lignes ne traversant pas D, et trouver un polynome $P_n(x)$, tel que, à l'intérieur de D',

$$|R_n(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n},$$

et le polynome $P_n(x)$ différera de $f(x)$ de moins de $\frac{2}{n}$, en module, lorsque x est dans D'.

On déduit facilement de là la possibilité de représenter $f(x)$ par une série de polynomes dans une aire D, limitée par un seul contour, en remarquant que la méthode de M. Appell suppose seulement que chaque point du domaine est extérieur à tous les cercles. Soit D_n le domaine obtenu en retranchant de D la portion balayée par un cercle de rayon $\frac{1}{n}$, dont le centre décrit la frontière C. Pour n assez grand, D_n existe et ce domaine est d'un seul tenant. On peut tracer un contour situé dans l'anneau compris entre D_n et D_{n+1}, contenant D_n à l'intérieur, formé d'arcs de cercles tournant tous leur convexité vers D_n, ces cercles étant contenus tout entiers dans l'anneau. Soit alors $P_n(x)$ un polynome entier qui, dans D_n, diffère de $f(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$. La suite $P_n(x)$ a pour limite $f(x)$ lorsque x est un point intérieur de D, car ce point appartient à D_n pour n assez grand.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le domaine D, dans lequel $f(x)$ était représentée par une série de polynomes, était à distance finie. Supposons qu'il s'étende à l'infini et soit D la portion de ce domaine contenue dans un cercle de rayon n et de

centre origine. Il existe un polynome $P_n(x)$ qui dans D_n diffère de $f(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$; la suite des polynomes $P_n(x)$ converge vers $f(x)$ en tous les points du domaine ouvert D.

Les polynomes de Tchebicheff.

Étant donnée une fonction $f(\xi)$ de la variable réelle ξ, continue dans un intervalle (a, b), il existe un polynome entier de degré n au plus, $\Pi_n(\xi)$ pour lequel le maximum de $|f(\xi) - \Pi_n(\xi)|$ est inférieur ou égal à celui qu'on obtiendrait en remplaçant $\Pi_n(\xi)$ par tout autre polynome de degré n. Le polynome $\Pi_n(\xi)$ fournit, pour représenter $f(\xi)$, une approximation supérieure à celle que donnerait un autre polynome du même degré; ce polynome de degré n au plus est unique et s'appelle un polynome de Tchebicheff (1).

Soit $f(x)$ une fonction continue de la variable complexe x dans le domaine fermé D; il existe un polynome entier en x de degré n au plus, $\Pi_n(x)$ tel que le maximum du module de $f(x) - \Pi_n(x)$ soit inférieur ou égal au maximum du module de la différence correspondante pour tout autre polynome de degré n au plus. La démonstration est la même que pour le cas des variables réelles et je renverrai pour ce point à l'Ouvrage de M. Borel. Au contraire, les démonstrations des propriétés des polynomes $\Pi_n(x)$ sont différentes des démonstrations de ces mêmes propriétés dans le domaine réel, démonstrations dont l'extension au cas des variables complexes semble délicate (2).

Le polynome $\Pi_n(x)$ *de degré n au plus est unique* (3); ce résultat sera la conséquence de la proposition suivante : *Soit* μ *le maximum du module de* $f(x) - \Pi_n(x)$, *où* $\Pi_n(x)$ *est le polynome de Tchebicheff de degré n, il y a au moins n + 2 points en lesquels ce module est égal à* μ. Supposons, en effet, que le module de cette différence soit égal à μ en $p \leq n + 1$ points

(1) *Voir* Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 82.

(2) J'ai utilisé ici le Mémoire de M. L. Tonelli, *I polinomi d'approssimazione di Tchebychev* (*Annali di Matematica*, t. XV, juin 1908).

(3) Au contraire, pour une fonction $f(\xi, \eta)$ de deux variables réelles, il existe plusieurs ou même une infinité de polynomes $\Pi_n(\xi, \eta)$ de degré n (Tonelli, *loc. cit.*).

seulement et soient $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ les valeurs de

$$f(x) - \Pi(x) = \varphi(x)$$

en ces points $x_1, x_2, \ldots, x_p$;

$$|\mu_1| = |\mu_2| = \ldots = |\mu_p| = \mu.$$

Il existe au moins un polynome de degré n, $\varpi(x)$ qui est égal à $f(x)$ en ces p points puisque p ne dépasse pas $n+1$; formons la différence

$$\psi(x) = f(x) - [\Pi(x) + \alpha\,\varpi(x)] = \varphi(x) - \alpha\,\varpi(x)$$

dans laquelle α est un nombre réel compris entre 0 et 1. Les fonctions φ et ϖ sont continues dans le domaine fermé D; on peut autour de chaque point de ce domaine décrire un cercle de rayon ρ, tel que la différence de deux valeurs de φ ou de deux valeurs de ϖ, en deux points du cercle intérieurs au domaine, ait un module inférieur à $\frac{1}{4}\alpha\mu$. Décrivons autour des points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ comme centres des cercles de rayon ρ; on a, à l'intérieur et sur la circonférence de chaque cercle,

$$|\psi(x)| \leqq \mu\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < \mu,$$

puisqu'on a au centre

$$\psi(x_k) = \mu_k(1-\alpha), \qquad |\psi(x_k)| = \mu(1-\alpha)$$

et dans le cercle

$$|\psi(x) - \psi(x_k)| < |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varpi(x) - \varpi(x_k)| < \frac{1}{2}\mu\alpha.$$

Dans le domaine D_1 formé par la partie de D extérieure aux cercles, $|\varphi(x)|$ a un maximum μ_1 inférieur à μ et $|\varpi(x)|$ un maximum μ', on a donc

$$|\psi(x)| < |\varphi(x)| + \alpha|\varpi(x)| < \mu_1 + \alpha\mu';$$

prenons

$$\mu_1 + \alpha\mu' < \mu,$$

c'est-à-dire

$$\alpha < \frac{\mu - \mu_1}{\mu'},$$

le maximum de $|\psi(x)|$ dans le domaine D tout entier est inférieur à μ et le polynome $\Pi(x)+\sigma\varpi(x)$ de degré n donnant une approximation supérieure à celle de $\Pi(x)$, ce dernier polynome ne serait pas un polynome de Tchebicheff de degré n.

Admettons maintenant l'existence de deux polynomes de Tchebicheff de degré n, $\Pi(x)$ et $\Pi_1(x)$, le polynome $\frac{\Pi+\Pi_1}{2}$ est aussi un polynome de Tchebicheff de degré n, car on a

$$\psi(x)=f(x)-\frac{\Pi(x)+\Pi_1(x)}{2}=\frac{[f(x)-\Pi(x)]+[f(x)-\Pi_1(x)]}{2}$$

et

$$|\psi(x)|\leqq\frac{|f(x)-\Pi(x)|+|f(x)-\Pi_1(x)|}{2}\leqq\mu;$$

l'égalité ne peut avoir lieu que lorsque $|f-\Pi|$ et $|f-\Pi_1|$ sont tous deux égaux à μ, si μ est le maximum correspondant à Π et à Π_1; en un point où $|\psi|$ atteint son maximum μ, on a donc nécessairement

$$|f-\Pi|=|f-\Pi_1|=\mu$$

et les arguments de ces différences sont égaux, sinon le module de leur demi-somme serait inférieur à μ; donc ces différences sont égales et il en est de même de Π et Π_1. Ces deux derniers polynomes de degré n sont donc égaux pour $n+2$ points au moins, les $n+2$ points en lesquels le module de $\psi(x)$ atteint son maximum μ : ils sont donc identiques.

Ainsi, à une fonction donnée $f(x)$, correspond un seul polynome de Tchebicheff de degré n : *cette correspondance est continue*; en d'autres termes, étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un nombre η tel que l'inégalité

$$(1)\qquad |f(x)-\varphi(x)|<\eta$$

vérifiée pour tout point x de D, entraîne l'inégalité

$$|\Pi(x)-\varpi(x)|<\varepsilon$$

pour tout point x de D aussi, Π étant le polynome d'approximation de degré n de la fonction f, et ϖ celui de φ. En effet, s'il en était autrement, on pourrait trouver un nombre ε tel que, quelque petit que soit η, il y aurait une fonction φ vérifiant l'inégalité (1)

et pour laquelle on aurait en un point de D

$$|\mathrm{II} - \varpi| > \varepsilon.$$

Donnons à η les valeurs $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}, \ldots$ et soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p \ldots$ les fonctions φ correspondantes, $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_p, \ldots$ leurs polynomes de Tchebicheff; les polynomes ϖ_p sont bornés dans D; en effet, si M est le module maximum de f, on a

$$|\varphi_p| < \mathrm{M} + \frac{1}{p},$$

et

$$|\varphi_p - \mathrm{II}| \leqq |\varphi_p - f| + |f - \mathrm{II}| \leqq \mu + \frac{1}{p},$$

μ étant le maximum de $|f - \mathrm{II}|$; ϖ_p donnant une approximation au moins égale à celle de II, la différence $|\varphi_p - \varpi_p|$ a un module maximum au plus égal à $\mu + \frac{1}{p}$,

$$|\varphi_p - \varpi_p| \leqq \mu + \frac{1}{p},$$

donc

$$|\varpi_p| \leqq |\varphi_p| + \mu + \frac{1}{p} < \mathrm{M} + \mu + \frac{2}{p} < \mathrm{M} + \mu + 2.$$

Les ϖ_p étant bornés, on peut de la suite de ces polynomes extraire une suite nouvelle qui converge uniformément vers une fonction limite ϖ : cette fonction est un polynome de degré n (¹). Continuons d'appeler $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_p \ldots$ la suite de polynomes qui converge vers ϖ : cette suite étant extraite de la première ne peut converger uniformément vers $\mathrm{II}(x)$. Le module de $f - \varpi$ ne peut être inférieur à μ, je dis qu'il ne peut pas non plus lui être supérieur; en effet, l'inégalité

$$|\varphi_p - \varpi_p| \leqq \mu + \frac{1}{p}$$

entraîne, en passant à la limite

$$|f - \varpi| \leqq \mu.$$

Donc ϖ est identique à II, puisque le polynome d'approximation

---

(¹) On le voit, en répétant dans le cas des polynomes, le raisonnement de la page 23.

de $f(x)$ est unique; on a donc pour p assez grand

$$|\Pi - \varpi_p| < \varepsilon,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse [1].

Supposons maintenant que $f(x)$ soit une fonction holomorphe dans le domaine D et continue sur le contour C, il existe, quel que soit ε, un polynome $P(x)$, tel que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

dans D.

Supposons qu'on ait calculé les polynomes de Tchebicheff Π_1, Π_2, ..., Π_n, ... dont les degrés sont respectivement 1, 2, ..., n, ... au plus. Soit μ_n le module maximum de $f - \Pi_n$, les nombres μ_n ne croissent jamais avec n, car un polynome de degré $n - 1$ peut être considéré comme un polynome de degré n dont le premier coefficient est nul; d'ailleurs aucun μ_n n'est nul, si $f(x)$ n'est pas un polynome. La suite μ_n a une limite μ quand n croît indéfiniment et cette limite est nulle, sinon il n'existerait aucun polynome P pour lequel la différence $f - P$ ait un module maximum inférieur à μ. La série de polynomes

$$\Pi_1 + (\Pi_2 - \Pi_1) + \ldots + (\Pi_n - \Pi_{n-1}) + \ldots$$

a pour somme f et la somme Π_n des n premiers termes de cette série est un polynome de degré n au plus qui représente f avec la meilleure approximation possible pour un polynome de ce degré [2].

On peut espérer déduire de la considération des polynomes Π_n, relatifs à une fonction holomorphe $f(x)$, la démonstration de la possibilité de développer f en série de polynomes.

Remarquons que tous les Π_n sont bornés, car

$$|\Pi_n| < M + \mu_n < M + \mu_1,$$

M étant le module maximum de f dans D. Donc de toute suite

---

(1) Les démonstrations qui précèdent s'appliquent aussi aux fonctions d'une variable réelle, car des polynomes de degré n bornés sur un segment sont bornés dans tout domaine contenant ce segment.

(2) Si l'on convient que l'approximation est mesurée par la valeur maximum de $|f - P|$; on pourrait adopter une autre convention.

infinie de polynomes Π_n, on peut extraire une suite nouvelle convergente, pour laquelle μ_n a une limite μ. Il faudrait démontrer que $\mu = 0$ (¹).

(¹) Il est digne de remarque que, pour le théorème correspondant relatif aux fonctions d'une variable réelle, la difficulté réside dans la démonstration que toute suite infinie des Π_n donne naissance à une suite convergente. Cette proposition établie, on en déduit que $\mu = 0$ (*voir* TONELLI, *loc. cit.*, p. 60). C'est le contraire qui se présente pour le domaine complexe.

CHAPITRE III.

LES SÉRIES DE POLYNOMES ET LA REPRÉSENTATION CONFORME.

Les séries de puissances d'une fonction.

Les développements en séries de polynomes obtenus au Chapitre précédent ont été déduits de la considération de l'intégrale de Cauchy : si nous associons à l'emploi de la formule de Cauchy le procédé de la représentation conforme, nous obtiendrons de nouveaux développements importants.

Soit $F(x)$ une fonction holomorphe dans une aire D, limitée par un contour simple C : cette fonction peut être représentée par la somme d'une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes d'une fonction $f(x)$ qui ne dépend que du domaine, les coefficients du développement dépendant seuls de la fonction $F(x)$. On aura

$$(1)\qquad F(x) = a_0 + a_1 f(x) + \ldots + a_n [f(x)]^n + \ldots.$$

Lorsque D est un cercle, nous retrouverons la série de Taylor en prenant

$$f(x) = x - a \quad (^1).$$

Soit $f(x)$, la fonction holomorphe qui permet d'effectuer la représentation conforme de l'aire C, sur un cercle Γ de rayon r limité par la circonférence γ. La transformation

$$X = f(x) \qquad \text{ou} \qquad x = \varphi(X)$$

(f est holomorphe dans D et φ dans Γ) fait correspondre à la

(1) PUISEUX, *Recherches sur les fractions algébriques* (*Journal de Liouville*, t. XV, 1850, p. 380) se propose de développer les racines y d'une équation algébrique $\varphi(x, y) = 0$ suivant les puissances d'une fraction rationnelle de x. J'ai surtout utilisé pour la rédaction des pages qui suivent le Mémoire de M. FABER, *Ueber Reihentwickelungen analytischer Funktionen* (*Inaugural Dissertation*, München, 1902).

fonction $F(x)$ une fonction $F_1(X) = F[\varphi(X)]$ holomorphe dans Γ; on aura donc

$$(2) \qquad F_1(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \frac{F_1(Z)\,dZ}{Z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{F(z)\,f'(z)\,dz}{[f(z)]^{n+1}};$$

γ' est une circonférence concentrique à γ et de rayon inférieur à r, mais aussi voisine de γ qu'on le veut; C' est le contour qui lui correspond dans la représentation conforme ou toute autre courbe de D entourant le point correspondant à $z = 0$. La valeur de a_n est indépendante du rayon de γ', puisque $F_1(X)$ est holomorphe dans le domaine ouvert Γ : le développement (2) est par conséquent valable pour tout point X intérieur à Γ, et en remplaçant X par $f(x)$, on voit que le développement (1) est valable pour tout point x intérieur à D. Soit M le module maximum de $F(x)$ dans C' et par conséquent de $F_1(X)$ dans γ'; on a

$$|a_n| < \frac{M}{r'^n},$$

r' étant le rayon de γ'; donc

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} \quad (^1),$$

car r' est aussi voisin de r qu'on le veut.

Réciproquement, donnons-nous une suite de nombres arbitraires a_n, tels que $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ ne dépasse pas $\frac{1}{r}$, la série (1) converge uniformément à l'intérieur de D et la somme de cette série est une fonction holomorphe dans D [2].

---

[1] L'expression $\overline{\lim}\, u_n$ représente la plus grande des limites des nombres u_n; si l'on suppose que u_n est l'abscisse d'un point U_n, $\overline{\lim}\, u_n$ sera l'abscisse du point de l'ensemble dérivé des U_n qui a l'abscisse la plus grande; ce point existe, puisque l'ensemble dérivé est fermé.

[2] Si les nombres a_n ne sont assujettis qu'à la condition de fournir pour $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ un nombre inférieur à $\frac{1}{r}$, la fonction $F(X)$ admettra en général la courbe C comme coupure. La démonstration est immédiate lorsque C est une courbe analytique régulière; en effet, dans ce cas, $f(x)$ est holomorphe sur C; si $F(x)$ peut être prolongée au delà de C, la fonction $F_1(X) = F[\varphi(X)]$ peut être prolongée au delà de γ, mais cela est impossible en général, car la fonction $F_1(X) = \Sigma a_n X^n$ admet en général son cercle de convergence comme coupure.

Si le domaine D est annulaire et limité par deux contours simples C_1 et C_2, nous arriverons à un développement analogue à celui de Laurent. On peut faire la représentation conforme de ce domaine sur l'aire comprise entre deux circonférences concentriques γ_1 et γ_2 et de rayons r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$). Soient

$$X = f(x), \qquad x = \varphi(X)$$

les formules de transformation, la fonction $F_1(X) = F[\varphi(X)]$ est maintenant holomorphe dans l'anneau circulaire $\gamma_1 \gamma_2$ et l'on a

$$F_1(X) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n X^n,$$

d'où

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n [f(x)]^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \frac{F_1(Z)\,dZ}{Z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{F(z)\,f'(z)\,dz}{[f(z)]^{n+1}};$$

γ' est une circonférence comprise entre γ_1 et γ_2 et C' la courbe correspondante ou toute autre courbe enveloppant C_1 et située dans D (¹).

(¹) Si le domaine D est limité par des courbes C, C_1, C_2, ..., C_p et s'il est possible de faire la représentation conforme de D sur un domaine limité par une circonférence γ et des circonférences $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ intérieures à γ, on démontre de même le développement

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n [f(x)]^n + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^k \frac{1}{[f(x) - c_k]^n},$$

C_k étant le centre du cercle γ_k. Mais la possibilité de la représentation conforme n'est pas rigoureusement démontrée.

M. Painlevé [*Sur les lignes singulières, etc.* (*Annales de Toulouse*, 1888)] a représenté une fonction analytique $f(x)$ possédant des lignes singulières par des développements de la forme précédente. Si l'on fait, en effet, la représentation conforme du domaine Δ extérieur à un contour C enfermant une ligne singulière de $F(x)$ sur le domaine extérieur à un cercle γ de centre C, on obtient pour la fonction $F(x)$, supposée régulière dans Δ, un développement de la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \frac{1}{[f(x) - c]^n}.$$

Il suffit de supposer que le contour C_2 du texte s'est éloigné à l'infini. Lorsque

Revenons au développement (1). Les coefficients a_n peuvent s'obtenir aisément par le théorème des résidus. $f(x)$ s'annule en un point de D, celui qui correspond au centre de γ; ce point peut être choisi arbitrairement dans D.

L'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)f'(z)}{[f(z)]^{n+1}}dz$$

est égale au résidu du pôle de $\frac{Ff'}{f^{n+1}}$ qui correspond au zéro de $f(x)$. Soit

$$\varphi(X) = \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_n X^n + \ldots$$

le développement de Mac Laurin de la fonction $\varphi(X)$ autour de $X = 0$ (nous supposons, ce qui est toujours possible, que $X = 0$ et $x = 0$ se correspondent); remplaçons $x = \varphi(X)$ par sa valeur dans $F(x)$; on doit obtenir

$$F_1(X) = F[\varphi(X)] = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots;$$

soit

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

on aura

$$F_1(X) = A_0 + A_1(\alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots) + \ldots + A_n(\alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots)^n + \ldots,$$

d'où

$$a_0 = A_0, \qquad a_1 = \alpha_1 A_1, \qquad a_2 = \alpha_2 A_1 + \alpha_1^2 A_2,$$
$$a_n = \alpha_n A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_n A_n.$$

Les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ et peuvent donc être calculés lorsqu'on connaît un élément de la fonction analytique $F(x)$ [1].

Un cas particulier important est celui où $f(x)$ est un polynome

la fonction $F(x)$ admet plusieurs lignes singulières, qu'on peut enfermer dans des contours $C_1, C_2, \ldots, C_p$, on remplace $F(x)$ par la somme de n fonctions dont chacune n'admet qu'une seule des lignes singulières de $F(x)$. Il en résulte que $F(x)$ est représentée par la somme de n développements de la forme précédente, la fonction $f(x)$ variant pour chaque développement. On voit qu'on pourrait prendre la même fonction f, si le théorème sur la représentation conforme était établi.

[1] C'est cette remarque qui constitue une des parties essentielles de la méthode de M. Painlevé pour le calcul des développements relatifs aux domaines étoilés. On pourra voir, à ce sujet, la Note de M. Painlevé dans les *Leçons sur les variables réelles*, déjà citées.

entier; le domaine D est alors limité par un arc de lemniscate qui n'enferme qu'un seul zéro du polynome $f(x)$; nous reviendrons dans le Chapitre suivant sur les développements de cette nature.

Une intéressante application des développements (1) est relative à la théorie du prolongement analytique. Soit x_0 un point de la circonférence de convergence d'une série de Taylor; traçons une courbe C, intérieure au cercle, tangente en x_0 à la circonférence et formée par un seul arc analytique et régulier. Soit $f(x)$ la fonction qui donne la représentation conforme du domaine D intérieur à C sur le cercle γ de rayon r. $f(x)$ est régulière dans D, contour compris; si F est régulière en x_0, elle le sera dans le domaine limité par une courbe C_1 extérieure à D et voisine de C;

$$F_1(X) = F[\varphi(X)]$$

sera donc holomorphe dans un cercle γ_1 extérieur à γ. Or cela aura lieu si

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r};$$

lorsque

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r},$$

le point x_0 est singulier. Dans la théorie du prolongement analytique, on prend généralement pour C un cercle et l'on a

$$f(x) = x - c;$$

la valeur de a_n dépend alors d'une suite infinie de coefficients de $F(x)$. Un choix convenable de la fonction $f(x)$ permet de remédier à cet inconvénient et conduit à la démonstration de certains critères de régularité ou de singularité pour le point x_0. Je renverrai pour une étude détaillée de la question au travail déjà cité de M. Faber et à un Mémoire de M. Lindelöf [1].

Les séries de M. Faber.

Voyons maintenant comment la méthode de la représentation conforme peut être utilisée pour obtenir, dans le domaine D, une

---

[1] E. LINDELÖF, *Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques* (*Acta Societatis Fennicae*, t. XXIV, n° 7, Helsingfors, 1898).

fonction holomorphe quelconque $F(x)$, comme la somme d'une série

$$a_0 + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x) + \ldots,$$

dans laquelle *les polynomes* $P_n(x)$ *ne dépendent que du domaine* D et les constantes a_n seules dépendent en outre de la fonction $F(x)$. A chaque domaine D sera ainsi attachée une famille de polynomes [1]. Nous supposerons que le contour C limitant le domaine simplement connexe D soit formé d'un seul arc de courbe analytique et régulier. Soit $F(x)$ une fonction holomorphe dans D et continue sur C; nous allons appliquer de nouveau le théorème de Cauchy et introduire un changement de variable $x = \varphi(X)$, qui fera, cette fois, correspondre d'une manière conforme le domaine *intérieur* à un cercle γ de rayon 1 au domaine *extérieur* à D. On a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{F[\varphi(Z)]\varphi'(Z)}{\varphi(Z)-x}\,dZ,$$

la première intégrale étant prise dans le sens direct sur le contour C, et la seconde dans le sens inverse sur la circonférence γ. La fonction $x = \varphi(X)$ est holomorphe dans le cercle γ et, comme la courbe C est formée d'un seul arc de courbe régulier et analytique, $\varphi(X)$ est holomorphe sur la circonférence γ et par conséquent à l'intérieur d'un cercle γ_0 concentrique à γ et de rayon $\rho_0 (\rho_0 > 1)$. Soit C_0 la courbe qui correspond à γ_0 dans la représentation conforme; je suppose en outre que le point $x = \infty$ corresponde au centre $X = 0$ du cercle γ. On a, dans γ_0

$$\varphi(X) = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n + \ldots.$$

La partie de l'élément de l'intégrale qui va jouer ici un rôle fondamental est

$$\frac{dz}{z-x} = \frac{\varphi'(Z)\,dZ}{\varphi(Z)-x};$$

étudions la fonction

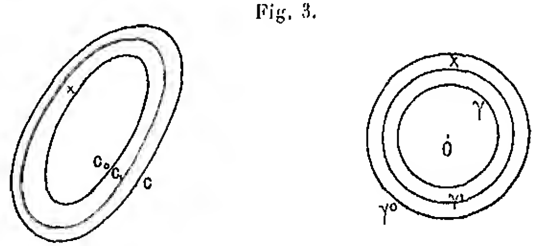
$$\psi(Z) = \frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z)-x}.$$

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. FABER, *Ueber polynomische Entwickelungen* (*Math. Annalen*, Bd. LVII, 1903, p. 389, et Bd. LXIV, 1907, p. 118).

Supposons que x soit à l'intérieur de la courbe C_1, correspondant au cercle γ_1 du centre $X=0$ et de rayon ρ_1 $(1<\rho_1<\rho_0)$ (*fig.* 3). Si Z est dans γ_1 et x dans C_1 on a toujours $\varphi(Z)\neq x$ et

Fig. 3.



la fonction $\psi(Z)$ n'a d'autre pôle que $Z=0$. D'ailleurs

$$\psi(Z)=\frac{-\dfrac{\alpha}{Z^2}+\alpha_1+\ldots}{\dfrac{\alpha}{Z}+\alpha_0-x+\alpha_1 Z+\ldots};$$

donc $\psi(Z)$ a, à l'origine, un pôle simple dont le résidu est -1, et on peut écrire dans le voisinage de $Z=0$

$$\psi(Z)+\frac{1}{Z}=\frac{\alpha_0-x+\lambda_1 Z+\ldots}{\alpha+(\alpha_0-x)Z+\ldots}=\frac{\alpha_0-x+\lambda_1 Z+\ldots}{\alpha(1-P)},$$

où

$$P=\frac{x-\alpha_0}{\alpha}Z+\alpha'_2 Z^2+\ldots=\alpha'_1 Z+\alpha'_2 Z^2+\ldots,\qquad \alpha'_1=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha_0);$$

les α'_k ne contenant pas x lorsque k est supérieur à 1. On a

$$\frac{1}{1-P}=1+P+P^2+\ldots+P^n+\ldots.$$

Le coefficient de Z^n, dans ce développement, ne dépend que de $P, P^2, \ldots, P^n$; il contient α'_1 à la $n^{ième}$ puissance, c'est donc un polynome entier en x de degré n, $Q_n(x)$ et l'on peut écrire

$$\frac{1}{1-P}=1+Q_1(x)Z+\ldots+Q_n(x)Z^n+\ldots$$

d'où

$$\begin{aligned}\psi(Z)+\frac{1}{Z}&=\sum\frac{1}{\alpha}[(\alpha_0-x)Q_n+\lambda_1 Q_{n-1}+\ldots+\lambda_{n-1}Q_1+\lambda_n]Z^n\\&=\sum P_{n+1}(x)Z^n,\end{aligned}$$

$$(1)\qquad \psi(Z)=-\frac{1}{Z}+P_1(x)+P_2(x)Z+\ldots+P_{n+1}(x)Z^n+\ldots.$$

$P_{n+1}(x)$ est un polynome de degré $n+1$: ce développement est valable pour toute valeur de x intérieure à D, car on peut supposer C_1 aussi voisin de C qu'on le veut. D'ailleurs $\psi(Z)+\frac{1}{Z}$ étant régulière dans γ_1 la série $\psi(Z)$ converge uniformément sur γ_1 ; on a alors

$$\int_{\gamma} \frac{F[\varphi(Z)]\varphi'(Z)}{\varphi(Z)-x}\,dZ = \int_{\gamma_1} \frac{F[\varphi(Z)]\varphi'(Z)}{\varphi(Z)-x}\,dZ,$$

car la fonction à intégrer est régulière dans l'anneau compris entre γ et γ_1, puisque x est à l'intérieur de C_1.

En définitive, il vient, en intégrant terme à terme,

$$(2)\qquad \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{F[\varphi(Z)]\varphi'(Z)}{\varphi(Z)-x}\,dZ \\ &= a_0+a_1 P_1(x)+\ldots+a_n P_n(x)+\ldots, \end{aligned}$$

si l'on pose

$$a_0 = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{F[\varphi(Z)]}{Z}\,dZ, \qquad a_n = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} F[\varphi(Z)]Z^{n-1}\,dZ,$$

ces intégrales pouvant d'ailleurs être calculées le long de γ [1].

Ainsi, les polynomes P_n sont déterminés lorsque le domaine D est connu, la fonction $F(x)$ n'intervient que dans le calcul des coefficients a_n.

Voici quelques exemples des développements précédents : supposons d'abord que D soit le domaine d'un cercle de rayon R et de centre x_0, on a

$$x = \varphi(X) = \frac{R}{X}+x_0,$$

$$\psi(Z) = \frac{1}{Z} = -\frac{\dfrac{x-x_0}{R}}{1-Z\dfrac{x-x_0}{R}} = -\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^{n+1}Z^n;$$

donc

$$P_n(x) = -\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n.$$

On retrouve la série de Taylor.

---

[1] Si la fonction $F(x)$ n'était pas continue sur C, on remplacerait C par une courbe voisine C_1 ; les intégrales précédentes seraient prises le long de γ_1, et ne changeraient pas de valeur quelque voisin que γ_1 soit de γ, puisque leurs éléments sont holomorphes dans l'anneau limité par γ_1 et γ. Le développement obtenu sera encore valable pour tous les points x intérieurs à D.

Prenons maintenant

$$x = \varphi(X) = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

Si X est intérieur au cercle γ de rayon 1 et de centre origine,

$$X = \rho e^{i\omega}, \qquad \rho < 1,$$

$$2x = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\omega + i\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\omega.$$

Lorsque ρ est constant, le point $x = \xi + i\eta$ décrit l'ellipse

$$\frac{4\xi^2}{\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{4\eta^2}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2} = 1$$

de foyers ± 1. Lorsque ρ croît de 0 à 1, l'ellipse, d'abord infinie, diminue jusqu'à s'aplatir sur le segment $(-1, +1)$. A la famille des cercles concentriques de centre origine et de rayons inférieurs à un du plan des X, correspond une famille d'ellipses homofocales et, à l'intérieur de l'un des cercles correspond l'extérieur de l'ellipse correspondante. Toute fonction holomorphe dans une de ces ellipses est développable en série de polynomes $P_n(x)$; ces polynomes sont les coefficients du développement suivant les puissances de Z de la fonction

$$\psi(Z) + \frac{1}{Z} = \frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z) - x} + \frac{1}{Z} = \frac{2Z - 2x}{1 - 2xZ + Z^2};$$

or

$$\frac{2Z - 2x}{1 - 2xZ + Z^2} = \frac{1}{Z - (x + \sqrt{x^2 - 1})} + \frac{1}{Z - (x - \sqrt{x^2 - 1})},$$

mais

$$\frac{1}{Z - (x - \sqrt{x^2 - 1})} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Z^n}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}},$$

$$\frac{1}{Z - (x - \sqrt{x^2 - 1})} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Z^n}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}};$$

donc

$$\begin{aligned} -P_n(x) &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n} + \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n} \\ &= (x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \quad (^1). \end{aligned}$$

---

(1) Ce développement a été obtenu par M. Picard à l'aide d'une méthode différente. *Voir* son *Traité d'Analyse*, t. II, deuxième édition, p. 317.

Nous allons établir quelques propriétés fondamentales des polynomes $P_n(x)$. Supposons que x soit extérieur à C_0, il existe alors un point X unique dans le cercle γ_0 pour lequel

$$\varphi(X) = x.$$

Considérons la fonction

$$\psi(Z, X) = \frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z) - x} = \frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z) - \varphi(X)};$$

en tenant compte du développement écrit plus haut pour $\varphi(Z)$, on obtient

$$\frac{\varphi(Z) - \varphi(X)}{Z - X} = -\frac{\alpha}{XZ} + \alpha_1 + \alpha_2(X + Z) + \ldots;$$

par conséquent

$$\psi(Z, X) = \frac{-\dfrac{\alpha}{Z^2} + \alpha_1 + \ldots}{(Z - X)\left(-\dfrac{\alpha}{XZ} + \alpha_1 + \ldots\right)}$$

pour Z et X voisins de zéro, cette expression est comparable à

$$\frac{-\dfrac{\alpha}{Z^2}}{-\alpha\dfrac{(Z - X)}{XZ}} = \frac{X}{Z(Z - X)};$$

formons la différence

$$\theta(Z, X) = \psi(Z, X) - \frac{X}{Z(Z - X)}$$
$$= \frac{\alpha_1 + \ldots - \dfrac{X}{Z}(\alpha_1 + \ldots)}{\varphi(Z) - \varphi(X)} = \frac{\alpha_1(Z - X)X + \ldots}{XZ[\varphi(Z) - \varphi(X)]};$$

le second membre est une fonction régulière des deux variables Z et X dans le cercle γ_0, car les deux termes de la fraction sont réguliers dans ce cercle et le dénominateur ne peut s'annuler. On peut donc écrire

(3) $$\theta(Z, X) = \psi_1(X) + Z\psi_2(X) + \ldots + Z^n\psi_{n+1}(X) + \ldots$$

les $\psi_n(X)$ étant holomorphes dans γ_0; d'autre part,

$$\frac{X}{Z(Z - X)} = -\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z - X} = -\frac{1}{Z} - \frac{1}{X} - \frac{Z}{X^2} - \ldots - \frac{Z^n}{X^{n+1}} - \ldots$$

si $|Z| < |X|$; on déduit de là

$$\psi(Z, X) = -\frac{1}{Z} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[-\frac{1}{X^{n+1}} + \psi_{n+1}(X) \right] Z^n.$$

Si maintenant x est dans l'anneau limité par C_0 et C, le développement (1) obtenu précédemment pour $\psi(Z)$ est encore valable et la comparaison des deux séries entières en Z qui représentent cette fonction conduit à l'identité

$$(4) \qquad P_n(x) = -\frac{1}{X^n} + \psi_n(X).$$

Supposons que x soit contenu dans la couronne C_0 et C_1 $(1 < \rho_1 < \rho_0)$, on pourra dans la série (2) remplacer $P_n(x)$ par la valeur tirée de (4); on aura alors, en remplaçant x par $\varphi(X)$,

$$F_1(X) = a_0 + a_1 \left[-\frac{1}{X} + \psi_1(X) \right] + \ldots + a_n \left[-\frac{1}{X^n} + \psi_n(X) \right] + \ldots,$$

$$F_1(X) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{X^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \psi_n(X),$$

car ces deux séries sont absolument convergentes. On voit donc que *les a_n sont les coefficients du développement de $F_1(X)$, en série de Laurent.*

Il résulte immédiatement de là que *le développement de $F(x)$ en série de polynomes $P_n(x)$ est unique,* car si l'on pouvait obtenir deux suites distinctes de coefficients a_n, on aurait pour la fonction $F_1(X)$, deux développements différents en série de Laurent.

Examinons de plus près les propriétés de la série (2). Supposons d'abord que x soit situé entre C et C_0, et soit C_1 la courbe passant par x qui correspond au cercle γ_1 de rayon $\rho_1 < \rho_0$. Je dis que

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{1}{\rho_1};$$

en effet

$$P_n(x) = -\frac{1}{X^n} + \psi_n(X)$$

et

$$|\psi_n(X)| < \frac{M}{\rho_1'^n},$$

M étant le maximum de la fonction $\theta(Z, X)$ lorsque

$$|Z| \leqq \rho'_1, \quad |X| < \rho'_1 \quad (\rho_1 < \rho'_1 \leqq \rho_0),$$

comme il résulte de la formule (3); donc

$$|X^n \psi_n(X)| < M\left(\frac{\rho_1}{\rho'_1}\right)^n$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Or

$$P_n(x) = -\frac{1}{X^n}[1 - X^n\psi_n(X)],$$

donc

$$\sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{1}{\rho_1}|1 - X^n\psi_n(X)|^{\frac{1}{n}}$$

a pour limite $\frac{1}{\rho_1}$.

Si x est à l'intérieur de la courbe C_1, on aura

$$|P_n(x)| < \frac{K}{\rho_1^n},$$

K étant un nombre supérieur à $|1 - X^n\psi_n(X)|$, lorsque X est sur γ_1, car le module maximum de $P_n(x)$ est atteint pour un point de C_1 : on déduit de cette dernière inégalité

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|P_n(x)|} \leqq \frac{1}{\rho_1}.$$

Donc, *si la fonction* $F(x)$ *est holomorphe à l'intérieur de la courbe* C_1, *la série* (2) *converge uniformément et absolument dans le domaine limité par cette courbe.*

Si x est sur C_1, on a pour n assez grand

$$\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|P_n(x)|} < 1$$

avec

$$\lim \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{1}{\rho_1};$$

donc

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \rho_1 \leqq \rho_0.$$

Réciproquement, donnons-nous arbitrairement une suite de coefficients a_n tels que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho_1 \geqq \rho_0.$$

Je dis que la série

$$(5) \qquad a_0 + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x) + \ldots$$

converge uniformément à l'intérieur de C_1 et diverge à l'extérieur de cette courbe. Prenons en effet x à l'intérieur d'une courbe C_2 voisine de C_1 et telle que le rayon ρ_2 du cercle γ_2 correspondant soit supérieur à ρ_1. On a, pour n assez grand,

$$|P_n(x)| < \frac{1}{(\rho_2 - \varepsilon)^n},$$

$$|a_n| < (\rho_1 + \varepsilon)^n;$$

donc

$$|a_n P_n(x)| < \left(\frac{\rho_1 + \varepsilon}{\rho_2 - \varepsilon}\right)^n,$$

et l'on peut prendre ε assez petit pour que le rappport $\frac{\rho_1 + \varepsilon}{\rho_2 - \varepsilon}$ soit inférieur à 1. La série converge donc absolument et uniformément dans C_2 qui est aussi voisine de C_1 qu'on le veut. Prenons x à l'extérieur de C_1, sur une courbe C'_1 ($\rho'_1 < \rho_1$). On a, pour n assez grand,

$$|P_n(x)| > \frac{1}{(\rho'_1 + \varepsilon)^n},$$

et, pour une infinité de valeurs de n,

$$|a_n| > (\rho_1 - \varepsilon)^n,$$

d'où

$$|a_n P_n(x)| > \left(\frac{\rho_1 - \varepsilon}{\rho'_1 + \varepsilon}\right)^n,$$

et l'on peut prendre ε assez petit pour que $\frac{\rho_1 - \varepsilon}{\rho'_1 + \varepsilon} > 1$. La série (5) diverge en x : elle représente à l'intérieur de C_1 une fonction holomorphe $F(x)$. Cette fonction $F(x)$ a au moins un point singulier sur C_1 si $\rho_1 < \rho_0$; en effet, si $F(x)$ était régulière sur C_1, elle pourrait être représentée par une série telle que (2) à l'intérieur d'une courbe C'_1 extérieure à C_1 ; mais un tel développement étant unique, la série qui définit $F(x)$ devrait converger à l'extérieur de C_1, ce qui est impossible.

Si les coefficients a_n ont des modules dont la plus grande des limites surpasse ρ_0, on ne peut rien dire, en général, sur la série (5).

Supposons qu'on ait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho_1 < \rho_0;$$

je vais montrer que si, en un point x de C_1, la fonction $F(x)$ est régulière, au point correspondant X de γ_1, la fonction

$$\Phi(X) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{X^n}$$

est, elle aussi, régulière et réciproquement.

D'abord si $F(x)$ est régulière en x,

$$F_1(X) = F[\varphi(X)]$$

est régulière en X, puisque $\varphi(X)$ est holomorphe en ce point; réciproquement la fonction inverse de $\varphi(X)$

$$X = f(x)$$

est régulière en x sur C_1; donc, si $F_1(X)$ est régulière en X, la fonction

$$F(x) = F_1[f(x)]$$

est régulière en x.

D'autre part, la substitution

$$x = \varphi(X)$$

nous donne

$$P_n(x) = -\frac{1}{X^n} + \psi_n(X),$$

d'où

$$F_1(X) = -\Phi(X) + \Psi(X), \qquad \Psi(X) = \sum a_n \psi_n(X);$$

la fonction $\Psi(X)$ est régulière dans γ_0, car on a, dans le cercle γ'_1 $(\rho_1 < \rho'_1 < \rho_0)$,

$$|\psi_n(X)| < \frac{M}{\rho_1'^n};$$

d'autre part

$$|a_i| < (\rho_1 + \varepsilon)^n,$$

donc

$$|a_n \psi_n(X)| < M\left(\frac{\rho_1+\varepsilon}{\rho'_1}\right)^n,$$

et $\rho_1+\varepsilon < \rho'_1$ pour ε assez petit : donc $F_1(X)$ et $\Phi(X)$ sont régulières en même temps sur γ_1 (¹).

Voici une conséquence de la remarque qui précède : *si les nombres a_n sont assujettis à la seule condition que*

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho_1 < \rho_0,$$

la fonction $F(x)$ admet en général la courbe C_1 comme coupure. En effet, la fonction $\Phi(X)$ admet son cercle de convergence comme coupure.

On voit que les propriétés des polynomes $P_n(x)$ rapprochent les séries (2) des séries de Taylor.

Nous avons établi plus haut que les singularités des fonctions $\Phi(X)$ sur γ_1 et $F(x)$ sur C_1 se correspondent; il y a plus, dans tout le plan, les points singuliers des deux fonctions se correspondent aussi. En effet, d'abord $F(x)$ est régulière à l'intérieur de C_1 et $\Phi(X)$ à l'intérieur de γ_1; supposons qu'on puisse tracer un chemin allant, dans le plan des X, d'un point A de γ_1 à un point B à l'intérieur de ce cercle, le long duquel $\Phi(X)$ est régulière, on en déduit, en répétant le raisonnement fait précédemment, que le chemin correspondant du plan des x conduit d'un point a de C_1 à un point b extérieur à cette courbe et que $F(x)$ est régulière sur ce chemin. Réciproquement à un chemin extérieur à C_1 le long duquel $F(x)$ est régulière, correspond un chemin intérieur à γ_1 le long duquel $\Phi(X)$ est régulière : cela suffit à établir notre proposition.

Enfin, on peut remplacer la suite des polynomes $P_n(x)$ par une infinité d'autres suites jouant le même rôle, car on peut écrire

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{F[\varphi(Z)]}{K(Z)}\,\frac{K(Z)\varphi'(Z)}{\varphi(Z)-x}\,dZ,$$

$K(Z)$ étant une fonction régulière dans γ_0 [on peut toujours supposer que γ_1 ne passe par aucun zéro de $K(z)$]. La fonction

(¹) On peut ajouter que les singularités de $F(x)$ en x et de $\Phi(X)$ en X sont de même nature, des pôles ou des points critiques de même ordre, ou des points essentiels

$K(Z)\psi(Z)$ va remplacer ici la fonction $\psi(Z)$. On aura dans γ_0, si

$$K(Z)=\sum\beta_n Z^n \qquad \text{et} \qquad P_0=-1,$$

$$K(Z)\psi(Z)=(\beta_0+\beta_1 Z+\ldots+\beta_n Z^n+\ldots)$$
$$\times\left[\frac{P_0}{Z}+P_1(x)+P_2(x)Z+\ldots+P_{n+1}(x)Z^n+\ldots\right],$$

d'où

$$K(Z)\psi(Z)=\frac{\Pi_0(x)}{Z}+\Pi_1(x)+\Pi_2(x)Z+\ldots+\Pi_{n+1}(x)Z^{n+1}+\ldots$$

avec

$$\Pi_n(x)=\beta_0 P_n+\beta_1 P_{n-1}+\ldots+\beta_n P_0.$$

Les propriétés des polynomes Π_n sont les mêmes que celles des polynomes P_n, mais le développement d'une fonction $F(x)$ en série de polynomes Π_n n'est pas nécessairement unique [1].

Une classe de séries de M. Faber.

En nous servant du théorème de M. Hadamard sur la multiplication des singularités, nous serons conduit à une classe très générale de développements de M. Faber. Soient les deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ définies par les éléments

$$\left.\begin{aligned} g(x)&=\gamma_0+\gamma_1 x+\ldots+\gamma_n x^n+\ldots,\\ h(x)&=\frac{1}{\gamma_0}+\frac{x}{\gamma_1}+\ldots+\frac{x^n}{\gamma_n}+\ldots,\end{aligned}\right\}\ (\gamma_n\neq 0 \text{ quel que soit } n)$$

nous supposons que ces deux fonctions sont régulières dans le plan des x où l'on a pratiqué la coupure rectiligne $(+1,\infty)$. Pour donner un exemple, prenons

$$g(x)=(1-x)^{-\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}x^n+\ldots;$$

α étant positif; on aura

$$h(x)=1+\frac{x}{\alpha}+\ldots+\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}x^n+\ldots;$$

(1) FABER, *loc. cit.*

on vérifie facilement que le coefficient du terme général de $h(x)$ peut s'écrire, en employant les fonctions eulériennes,

$$(\alpha-1)\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+n)}=(\alpha-1)\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-1}\,dt,$$

si $\alpha\neq 1$ (le cas de $\alpha=1$ est évident); le coefficient de x^n est donc de la forme $\int_0^1 t^n \mathrm{V}(t)\,dt$ et, d'après un théorème de M. Hadamard que nous avons établi au Chapitre I, la fonction $h(x)$ est régulière dans le plan, aux mêmes points que $g(x)$ [1].

Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction holomorphe dans D; nous supposerons, ce qui est toujours possible, que le point $x=0$ est à l'intérieur de C_0; appliquons à $\mathrm{F}(x)$ l'opération fonctionnelle H de M. Hadamard [2]. On obtient ainsi la fonction

$$\mathrm{F}_1(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}_1}\mathrm{F}(z)\,g\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

qui n'a dans tout le plan d'autres points singuliers possibles que ceux de $\mathrm{F}(x)$.

Je dis que tout point singulier de F est effectivement un point singulier de F_1; on a, en effet,

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}_1}\mathrm{F}_1(z)\,h\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

puisque si l'élément à l'origine de $\mathrm{F}(x)$ est $\sum b_n x^n$, celui de $\mathrm{F}_1(x)$ sera $\sum \gamma_n b_n x^n$ et celui de la fonction obtenue à l'aide de la dernière intégrale sera de nouveau $\sum b_n x^n$. Donc tous les points singuliers de $\mathrm{F}(x)$ doivent appartenir à F_1 et, comme ceux de F_1 doivent appartenir à F, ces points sont les mêmes. Appelons H_1 l'opération fonctionnelle qui utilise la fonction g; H_2 celle qui utilise la fonction h. On a, en faisant dans la dernière formule la substitution $z=\varphi(\mathrm{Z})$,

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}_1}\mathrm{F}_1(z)\,h\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\mathrm{F}_1[\varphi(\mathrm{Z})]\,h\left[\frac{x}{\varphi(\mathrm{Z})}\right]\frac{\varphi'(\mathrm{Z})}{\varphi(\mathrm{Z})}\,d\mathrm{Z}.$$

---

(1) On peut aussi remarquer que $h(x)$ est un cas particulier de la fonction hypergéométrique, $h(x)=\mathrm{F}(1,1,\alpha,x)$

(2) Cette opération a été étudiée à la page 37.

Soit

$$\psi_1(Z) = h\left[\frac{x}{\varphi(Z)}\right]\frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z)}.$$

La fonction $\psi_1(Z)$ est régulière dans γ_0, si x est à l'intérieur de C_0 puisque $x \neq \varphi(X)$; le développement de $\psi_1(Z)$ en série de Mac Laurin convergera donc dans γ_0; pour obtenir ce développement, supposons x assez voisin de zéro pour que $\left|\frac{x}{\varphi(Z)}\right| < 1$; on aura

$$h\left[\frac{x}{\varphi(Z)}\right] = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\gamma_n}\frac{x^n}{[\varphi(Z)]^n},$$

$$\frac{1}{\varphi(Z)} = \frac{1}{\frac{\gamma}{Z} + \alpha_0 + \alpha_1 Z + \ldots} = Z(\beta_0 + \beta_1 Z + \ldots + \beta_n Z^n + \ldots),$$

$$h\left[\frac{x}{\varphi(Z)}\right] = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n Z^n}{\gamma_n}(\beta_0 + \beta_1 Z + \ldots)^n = q_0(x) + Z q_1(x) + \ldots + Z^n q_n(x) + \ldots,$$

en ordonnant par rapport à Z et en désignant par $q_n(x)$ un polynome entier en x de degré n. D'ailleurs

$$\frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z)} = -\frac{1}{Z} + \beta'_0 + \beta'_1 Z + \ldots,$$

donc

$$(6) \qquad \psi_1(Z) = \frac{p_0(x)}{Z} + p_1(x) + p_2(x)Z + \ldots + p_{n+1}(x)Z^n + \ldots,$$

où $p_n(x)$ est un nouveau polynome de degré n. On en déduit, comme précédemment, un développement de $F(x)$ en série de la forme $\sum a'_n p_n(x)$ avec

$$a'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} F_1[\varphi(Z)]Z^{n-1}\,dZ$$

On retrouve les polynomes $P_n(x)$ en prenant

$$g(x) = h(x) = \frac{1}{1-x};$$

on a, dans ce cas,

$$\psi_1(Z) = \frac{1}{1 - \frac{x}{\varphi(Z)}}\,\frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z)} = \psi(Z).$$

On voit que le développement de $\psi(Z)$ se déduit du développement (6) de $\psi_1(Z)$ en remplaçant γ_n par 1, c'est-à-dire en remplaçant x^n par $\gamma_n x^n$, ce qui revient à appliquer aux polynomes p_n l'opération H_1; de même l'opération H_2 appliquée aux polynomes P_n fournit les polynomes p_n. Les séries de polynomes $\sum a_n p_n$ et $\sum a_n P_n$ appartiennent à la même classe.

Remarquons d'ailleurs que, si l'on remplace γ_n par 1, l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} F_1[\varphi(Z)]\,\psi_1(Z)\,dZ,$$

devient égale à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} F_1[\varphi(Z)]\,\psi(Z)\,dZ = F_1(x).$$

On a donc

$$F_1(x) = \sum a'_n\, P_n(x)$$

et

$$F(x) = \sum a'_n\, p_n(x);$$

donc, si l'on applique l'opération H_2, terme à terme, à la première série, on obtient une série dont la somme $F(x)$ résulte de $F_1(x)$ par l'opération H_2; en d'autres termes l'opération H_2 est applicable terme à terme. D'ailleurs, si l'on applique H_1 à la seconde série, on retrouve la première, donc l'opération H_1 est applicable terme à terme à la seconde série [1].

On déduit facilement de la remarque précédente que le développement de $F(x)$ en série $\sum a'_n p_n(x)$ est unique; si l'on avait, en effet, deux développements distincts de $F(x)$, l'opération H_1, appliquée à ces développements, nous fournirait pour $F_1(x)$ deux séries différentes de la forme $\sum a'_n P_n(x)$, ce qui est impossible.

D'autre part, $F(x)$ et $F_1(x)$ ont les mêmes points singuliers β; or les points singuliers de $F_1(x)$ sont liés aux points singuliers α de la fonction $\Phi(X) = \sum \frac{a'_n}{X^n}$ par la relation $\beta = \varphi(\alpha)$; donc il y a

---

[1] Remarquons que l'intégration et la dérivation sont des opérations H particulières.

la même relation entre les points singuliers de $\Phi(X)$ et ceux de $F(x)$.

Je n'insiste pas sur l'extension aux polynomes $p_n(x)$ des autres propriétés des polynomes $P_n(x)$.

On peut substituer aux polynomes $p_n(x)$, déduits du développement en série de Mac Laurin de la fonction $\psi_1(Z)$ des polynomes $\varpi_n(x)$ obtenus à l'aide de la fonction $\psi_1(Z)K(Z)$, $K(Z)$ étant régulière dans γ_0. Ces polynomes $\varpi_n(x)$ joueront le même rôle que les polynomes $\Pi_n(x)$ introduits plus haut.

Application aux polynomes de Legendre.

On appelle *polynomes de Legendre* $X_n(x)$, les coefficients du développement de Mac Laurin de la fonction de Z

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xZ+Z^2}}=X_0(x)+X_1(x)Z+\ldots+X_n(x)Z^n+\ldots.$$

Une fonction $F(x)$ holomorphe à l'intérieur d'une ellipse de foyers $+1$ et -1 peut être représentée par la somme d'une série de polynomes de Legendre

$$F(x)=a_0X_0+a_1X_1+\ldots+a_nX_n+\ldots, \tag{7}$$

qui converge uniformément à l'intérieur de cette ellipse.

Nous allons déduire ce théorème des développements généraux de M. Faber. La transformation conforme

$$x=\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{X}\right)=\varphi(X)$$

fait correspondre au cercle de centre origine et de rayon $\rho<1$ du plan des X, l'ellipse du plan des x dont les foyers sont -1 et $+1$, et le grand axe $\rho+\frac{1}{\rho}$; l'intérieur du cercle correspond à l'extérieur de l'ellipse. Laissons fixe le nombre ρ et posons

$$h(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n,$$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_nx^n,$$

d'où

$$F_1(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)} A_n x^n.$$

Formons maintenant

$$\psi_1(Z) = h\left[\frac{x}{\varphi(Z)}\right]\frac{\varphi'(Z)}{\varphi(Z)} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2xZ}{Z^2+1}}}\,\frac{Z^2-1}{Z(Z^2+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2xZ+Z^2}}\,\frac{Z^2-1}{Z\sqrt{Z^2+1}}.$$

La fonction $K(Z) = \frac{Z\sqrt{Z^2+1}}{Z^2-1}$ est régulière dans le cercle γ de rayon $\rho < 1$, nous prendrons alors

$$\psi_1(Z)\,K(Z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xZ+Z^2}},$$

comme fonction génératrice des polynomes $\varpi_n(x)$, qui seront ici les polynomes X_n de Legendre. On en déduit immédiatement que toute fonction $F(x)$ holomorphe dans une ellipse de foyers $+1$ et -1 est développable en série de la forme (7). Cette série converge à l'intérieur de l'ellipse de mêmes foyers, qui passe par un point singulier de $F(x)$ et qui n'en contient aucun à l'intérieur; enfin, chaque point singulier β de la fonction $F(x)$ est lié à un point singulier α de la fonction

$$\Phi(x) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$$

par la relation

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (^1).$$

(1) Voir Faber, *Ueber Reihen nach Legendreschen Polynomen* (*Jahresbericht der deutschen math. Vereinigung*, 1907, p. 109).

CHAPITRE IV.

LES SÉRIES DE POLYNOMES CONVERGENTES DANS PLUSIEURS DOMAINES.

Exemples simples.

Lorsqu'une série de polynomes converge uniformément dans une aire D, limitée par un seul contour, la somme de cette série représente une fonction analytique dans D. D'ailleurs, une telle série ne saurait converger uniformément dans une aire connexe limitée par plusieurs contours, sans converger aussi dans les aires exclues par les contours intérieurs. Mais une série de polynomes peut converger uniformément dans deux domaines D_1, D_2 d'un seul tenant et extérieurs l'un à l'autre. Les sommes $F_1(x)$ et $F_2(x)$ de la série dans D_1 et dans D_2 sont des fonctions analytiques : chacune de ces fonctions est-elle le prolongement analytique de l'autre? Si ce sont deux fonctions distinctes, sont-elles liées par quelque relation ou peut-on les choisir arbitrairement? C'est de ces questions que nous allons nous occuper maintenant.

Voici d'abord un exemple simple : $P(x)$ est un polynome entier de degré m dont les racines sont distinctes. L'équation

$$P(x) = u$$

admet, lorsque u est voisin de zéro, m racines fonctions holomorphes de u, dont le développement en série de Mac Laurin peut aisément se calculer et converge dans un cercle du plan des u dont le centre est à l'origine et le rayon est le module ρ_0 de la plus petite valeur de u, pour laquelle l'équation a une racine multiple. Soit ρ un nombre inférieur à ρ_0 ; on a le développement convergent pour $|u| \leqq \rho$

$$x = a_0 + a_1 u + \ldots + a_n u^n + \ldots$$

ou

$$x = a_0 + a_1 P(x) + \ldots + a_n [P(x)]^n + \ldots, \tag{1}$$

pour toutes les valeurs de x telles que

$$|P(x)| \leqq \rho.$$

Ces points x sont les points des domaines limités par la lemniscate d'équation

$$|P(x)| = \rho,$$

qui comprend m branches fermées dont chacune entoure une racine de $P(x)$ (¹).

Dans chacun de ces domaines D_k, la série (1) est convergente; pour un point x du domaine D_0 qui entoure a_0 elle a pour somme x, racine voisine de a_0; si x_k est un point du domaine D_k, la série a pour somme la valeur unique x du domaine D_0 pour laquelle on a

$$P(x) = P(x_k).$$

Soit par exemple

$$P(x) = x^2 - 1,$$

on en déduit

$$x = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)} u^n + \ldots,$$

x étant la racine de l'équation $x^2 - 1 = u$ qui est égale à 1 pour $u = 0$. La série

$$1 + \frac{x^2-1}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)} (x^2-1)^n + \ldots$$

est convergente pour $|x^2 - 1| < 1$, c'est-à-dire à l'intérieur des ovales de Cassini de foyers $+1$ et -1. Elle a pour somme x dans l'ovale de droite et $-x$ dans l'ovale de gauche. La convergence ne cesse pas à l'origine, point double de la lemniscate qui passe par ce point et la convergence est uniforme sur tout arc de courbe intérieur à la lemniscate, qui, passant par l'origine, unit un point de l'ovale de droite à un point de celle de gauche. Par exemple, la série converge uniformément sur le segment rectiligne

(¹) Un calcul élémentaire montre, en effet, que si l'on fait croître ρ à partir de zéro, les ovales qui, lorsque ρ est voisin de zéro, entourent les m racines, sont séparées tant que ρ reste inférieur à ρ_0. Pour $\rho = \rho_0$, deux des courbes viennent se rejoindre en une courbe unique présentant au point de rencontre un point double à tangentes rectangulaires.

$(-1, +1)$ et représente deux fonctions analytiques différentes sur les segments $(-1, 0)$ et $(0, +1)$: $-x$ dans le premier, $+x$ dans le second [1].

La série de polynomes (1) représente des fonctions analytiques différentes dans ses différents domaines de convergence, mais deux de ces fonctions x et x' sont toujours liées par la relation

$$P(x) = P(x').$$

Nous allons voir comment, en substituant aux constantes a_n des polynomes de degré $(n-1)$, nous pouvons obtenir un résultat plus général.

Reprenons la formule d'interpolation d'Hermite. L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,\frac{(x-a_1)^{\alpha_1+1}(x-a_2)^{\alpha_2+1}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m+1}}{(z-a_1)^{\alpha_1+1}(z-a_2)^{\alpha_2+1}\ldots(z-a_m)^{\alpha_m+1}}\,dz,$$

étendue au contour C d'un domaine contenant les points a_k et dans lequel $f(x)$ est régulière, représente en chaque point x du domaine la différence

$$f(x) - \mathrm{H}(x),$$

où $\mathrm{H}(x)$ est un polynome de degré $\left[\sum(\alpha_k+1)\right]-1$ au plus, prenant en a_k la même valeur que $f(x)$ et dont les α_k premières dérivées prennent respectivement en a_k les mêmes valeurs que les dérivées correspondantes de $f(x)$ [2].

Nous prendrons $\alpha_k = p$; la courbe C sera la lemniscate définie par l'équation

$$|P(x)| = \rho, \qquad P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

où ρ est assez petit pour que la courbe comprenne m branches fermées C_k entourant les points a_k et limitant m domaines D_k. L'intégrale prise le long de C sera la somme des m intégrales prises

---

(1) Cette série de polynomes convergente sur le segment rectiligne $(-1, +1)$ est déjà signalée dans le *Traité de calcul différentiel et intégral* de J. Bertrand. Elle permet de rattacher à la famille des séries (1) les développements que M. Lebesgue a utilisés dans sa démonstration du théorème de Weierstrass sur les fonctions continues de variables réelles (*Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 60). Je dois cette remarque à M. Borel.

(2) *Voir* page 49

sur les contours C_k. Nous supposerons que $f(x)$ est égale dans D_1 à une fonction holomorphe quelconque $f_1(x)$, dans D_2 à une fonction holomorphe quelconque $f_2(x)$, etc. Un calcul fait précédemment montre que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\left[\frac{P(x)}{P(z)}\right]^{p+1} dz,$$

dont la partie relative au contour C_k est égale à la somme des résidus dans D_k de la fonction intégrée, est égale à $f(x) - \Pi_p(x)$, $\Pi_p(x)$ étant un polynome de degré $m(p+1)-1$ dont le développement par la formule de Taylor au point a_k a ses $p+1$ premiers termes identiques à ceux du développement de $f_k(x)$. Supposons que x reste à l'intérieur de la courbe définie par

$$|P(x)| = \rho' < \rho,$$

on aura, en désignant par H une constante,

$$|f(x) - \Pi_p(x)| < H\lambda^{p+1}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Lorsque p croît indéfiniment, le polynome $\Pi_p(x)$ a pour limite $f_k(x)$ dans le domaine D_k et la convergence est uniforme à l'intérieur de ce domaine. D'ailleurs, en utilisant de nouveau une transformation de calcul de Jacobi, nous aurons

$$\frac{1}{z-x} = \frac{\varphi(z,x)}{P(z)-P(x)},$$

$\varphi(z, x)$ étant un polynome en x et z de degré $m-1$ par rapport à chaque variable et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\left[\frac{P(x)}{P(z)}\right]^{p+1} dz = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\varphi(z,x)}{P(z)-P(x)}\left[\frac{P(x)}{P(z)}\right]^{p+1} dz.$$

Or

$$\frac{1}{P(z)-P(x)} = -\frac{1}{P(x)} - \frac{P(z)}{[P(x)]^2} - \dots$$
$$- \frac{[P(z)]^p}{[P(x)]^{p+1}} + \frac{[P(z)]^{p+1}}{[P(x)]^{p+1}[P(z)-P(x)]},$$

d'où, en multipliant les deux membres par $\varphi(z,x)\left[\dfrac{P(x)}{P(z)}\right]^{p+1}$ et

en intégrant

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\left[\frac{P(x)}{P(z)}\right]^{p+1} dz$$
$$= -\left\{ Q_0 + Q_1 P(x) + \ldots + Q_p [P(x)]^p \right\} + \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\varphi(z,x)}{P(z)-P(x)} dz,$$

en posant

$$Q_h(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\varphi(z,x)}{[P(z)]^{h+1}} dz.$$

Si l'on remarque que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\varphi(z,x)}{P(z)-P(x)} dz$$

est égale à $f(x)$, il vient

$$H_p(x) = Q_0 + Q_1 P(x) + \ldots + Q_p [P(x)]^p.$$

Donc la série

$$Q_0 + Q_1 P(x) + \ldots + Q_p [P(x)]^p + \ldots$$

a pour somme $f_1(x)$ dans D_1, $f_2(x)$ dans D_2, ..., $f_m(x)$ dans D_m (1).

Le théorème général.

Dans le premier exemple donné plus haut, les fonctions analytiques, égales dans les différents domaines à la somme de la série, n'étaient pas indépendantes; dans le second, les fonctions sont arbitraires, mais les domaines ne le sont pas. Je dis que les fonctions, comme les domaines, peuvent être complètement arbitraires; en d'autres termes: *Étant donnés m domaines à contours simples, D_1, D_2, ..., D_m, extérieurs les uns aux autres, et m fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$, analytiques et régulières respectivement dans chacun de ces domaines, il existe une série de polynomes qui converge uniformément dans chaque domaine et a pour somme $f_1(x)$ dans D_1, $f_2(x)$ dans D_2, ..., $f_m(x)$ dans D_m.*

Il suffit d'établir que, étant donnés deux domaines D, D' extérieurs l'un à l'autre, il exisle une série de polynomes ayant pour

(1) *Voir* KIENAST, *Inaugural Dissertation*, Zurich, p. 26.

somme $f(x)$ dans D et zéro dans D'; car, en prenant pour D le domaine D_i, pour D' un domaine contenant tous les D_k $(k \neq i)$ et pour $f(x)$ la fonction $f_i(x)$, on formera une série ayant pour somme $f_i(x)$ dans D_i et zéro dans D_k $(k \neq i)$. La somme des m séries obtenues en donnant à i les valeurs 1, 2, ..., m fournira la solution du problème.

Soient donc un domaine D limité par un contour simple C, D' un domaine extérieur à D; l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

a précisément pour valeur $f(x)$ dans D et zéro à l'extérieur de D. Si l'on remarque que les méthodes de démonstration données au Chapitre II, de la possibilité de représenter une fonction holomorphe par une série de polynomes, reposent en général sur un procédé d'approximation indéfinie de cette intégrale par un polynome, on est conduit à penser que ces mêmes méthodes nous fourniront la démonstration de la proposition qui nous occupe.

Prenons par exemple la méthode de M. Runge (¹) et soit D_n l'un des domaines définis dans cette méthode; nous avons pu construire une fraction rationnelle $g_n(x)$ qui diffère de l'intégrale de Cauchy de moins de $\frac{1}{n}$, lorsque x est dans D_{n-1} ou hors de D_{n+1}. Cette fonction $g_n(x)$ diffère donc de $f(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$ dans D_{n-1} et de zéro de moins de $\frac{1}{n}$ dans D', car, pour n assez grand, D' est tout entier extérieur à D_{n+1}. Les pôles de $g_n(x)$ sont d'ailleurs sur le contour de D_n; relions ce contour au point à l'infini par une ligne ne traversant pas D'; nous savons qu'on peut remplacer $g_n(x)$ par un polynome $P_n(x)$ qui dans D_{n-1} et dans D' différera de $g_n(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$, on aura donc

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{2}{n} \quad \text{dans} \quad D_{n-1},$$

$$|P_n(x)| < \frac{2}{n} \quad \text{dans} \quad D'.$$

La suite des polynomes $P_n(x)$ résout le problème.

(¹) Page 58.

On peut employer de la même manière la méthode des arcs de cercle de M. Appell. Les exemples et les démonstrations précédentes mettent en évidence la différence qui existe entre une expression analytique, en l'espèce une série de polynomes, et une fonction analytique définie, au sens de Weierstrass par le prolongement analytique d'un de ses éléments. C'est pour montrer cette différence que Weierstrass a construit une série de fractions rationnelles représentant zéro dans une portion du plan et 1 dans la portion restante ([1]); le procédé de construction de Weierstrass est compliqué. M. Borel a montré par une méthode simple et intuitive comment l'existence d'expressions analytiques représentant des fonctions analytiques différentes dans des régions distinctes du plan est une conséquence nécessaire de l'existence des fonctions non uniformes ([2]).

Une série de polynomes convergente dans deux domaines D et D′ peut représenter, dans ces domaines, deux fonctions analytiques distinctes dont chacune ne peut être prolongée hors de la région où elle est ainsi définie. Mais les valeurs de ces fonctions dans les deux domaines peuvent être liées d'une manière simple, si les polynomes sont soumis à certaines restrictions. Il semble donc que des familles de séries de polynomes pourraient servir à l'extension de la notion de prolongement analytique, en convenant d'appeler la même fonction analytique la valeur de la somme dans les deux domaines. Je renverrai pour ce point au Mémoire de M. Borel cité dans la note de la page 29.

L'extension du théorème général au cas d'une infinité dénombrable de domaines dont chacun est extérieur à tous les autres est immédiate. Soient D_1, D_2, ..., D_n, ... des domaines simples et

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

une suite de fonctions telle que $f_n(x)$ soit régulière dans D_n. Il

([1]) Weierstrass, *Zur Funktionen Lehre* (*Œuvres*, t. II, p. 212).

([2]) *Voir* Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 57. La méthode de M. Borel conduit aussi à une démonstration du théorème énoncé si l'on suppose démontrée la possibilité de développer une fonction holomorphe en série de polynomes dans un domaine simple.

existe un polynome $P_n(x)$ tel qu'on ait

$$|f_i(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La suite des polynomes $P_n(x)$ ainsi définis converge dans tous les domaines D_n; elle converge uniformément dans chacun d'eux et sa limite dans D_n est égale à $f_n(x)$. Nous verrons dans le Chapitre suivant que, *inversement, une série de polynomes convergente dans une région* D *du plan représente en général une infinité dénombrable de fonctions analytiques dont chacune est la somme de la série dans une portion de* D.

Représentation par une série de polynomes d'une fonction ayant des points singuliers.

Une série de polynomes uniformément convergente dans un domaine D ne saurait représenter une fonction ayant des points singuliers situés dans le domaine, puisque la série, convergeant uniformément sur une courbe entourant un point singulier, devrait avoir pour somme une fonction holomorphe à l'intérieur de la courbe. Les points singuliers d'une fonction ne peuvent donc pas être des points intérieurs de la région de convergence d'une série de polynomes représentant la fonction. Soit O un point du plan où la fonction est régulière, formons l'étoile rectiligne relative au point O; on peut, d'une infinité de manières, représenter la fonction par la somme d'une série de polynomes, convergeant uniformément dans toute aire intérieure à l'étoile, et chacune de ces séries peut être écrite, dès qu'on connaît l'élément de la fonction analytique au point O. C'est le théorème de M. Mittag-Leffler [1].

On peut modifier la forme de l'étoile, remplacer les rayons rectilignes par des courbes semblables entre elles et ne se coupant pas, mais, quel que soit le procédé adopté, le domaine de convergence uniforme ne peut envelopper de point singulier. Il en résulte que des points où la fonction est régulière sont exclus du domaine de convergence de la série et même, si cette fonction admet des

---

[1] Voir BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 196, et dans les *Leçons sur les variables réelles*, la Note de M. Painlevé.

coupures, il peut arriver que des régions du plan se trouvent exclues, bien qu'en tous leurs points la fonction soit holomorphe.

Il est clair que l'existence des courbes frontières de l'étoile est indispensable autour des points critiques· elles servent de coupures destinées à rendre uniforme la branche de la fonction définie par l'élément au point O ; mais, si la fonction $f(x)$ est uniforme, on peut toujours trouver une série de polynomes convergeant dans son domaine d'existence et ayant pour somme la valeur de la fonction en chaque point non singulier : c'est une conséquence du théorème sur les séries convergeant dans plusieurs domaines.

Prenons d'abord le cas le plus simple où, sur chaque rayon de l'étoile rectiligne, se trouve un seul point singulier et supposons, par exemple, que ces points singuliers n'aient aucun point limite à distance finie. Le raisonnement s'étendra de lui-même à des exemples plus compliqués. Traçons un cercle C de centre O et de rayon n ; soient A un point singulier et B le point où le rayon de l'étoile qui passe en A rencontre la circonférence C, une demi-circonférence de rayon $\frac{1}{n}$ dont le diamètre limite est perpendiculaire à AB et la concavité tournée vers O, balaie l'aire δ lorsque son centre décrit le segment AB. Soit D_n le domaine d'un seul tenant obtenu, en supprimant du cercle C les régions balayées par des cercles de rayon $\frac{2}{n}$ dont les centres décrivent des segments tels que AB. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ les points singuliers contenus dans C ; $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ les aires δ correspondantes : il existe un polynome $P_n(x)$ qui, dans les domaines $D_n, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ diffère de $f(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$ en module. La suite des polynomes $P_n(x)$ converge vers $f(x)$ en tout point régulier de cette fonction ; elle converge uniformément dans toute aire intérieure à l'étoile ; elle converge aussi uniformément sur tout segment des demi-droites frontières qui ne contient pas de point singulier [1].

---

[1] Si la fonction $f(x)$ n'est pas partout uniforme, on peut choisir, pour les valeurs de cette fonction sur une demi-droite frontière, celles qu'on obtient en prolongeant analytiquement $f(x)$ à partir du point O, dans un petit angle, positif, par exemple, dont le côté origine est OA ; soit $f_d(x)$ la valeur obtenue en x : la série de polynomes aura pour somme $f(x)$ en tous les points intérieurs de l'étoile et $f_d(x)$ sur les demi-droites frontières.

On peut prendre pour les polynomes $P_n(x)$, des polynomes du type de ceux de M. Mittag-Leffler, comme l'ont montré M. von Koch pour les pôles, M. Mittag-Leffler pour les points essentiels isolés, M. Painlevé pour des points singuliers soumis à des conditions très générales (¹).

Un autre exemple simple est celui où la fonction $f(x)$ admet une coupure unique, ou un nombre fini de telles coupures.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général d'une fonction uniforme quelconque $f(x)$; supposons d'abord que le point à l'infini soit régulier; on peut alors tracer un cercle C assez grand pour que l'ensemble fermé E des points singuliers soit à l'intérieur de ce cercle. Entourons chaque point singulier d'un cercle de rayon ε ayant son centre *en* ce point : d'après le théorème de Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini de ces cercles contenant tous les points de E; ces derniers se répartissent en groupes dont chacun constitue un domaine limité par un ou plusieurs contours, soit δ l'aire enfermée dans le contour extérieur d'un tel domaine; je dis que tout point régulier de $f(x)$ est à l'extérieur de tous les domaines δ lorsque ε est assez petit; soit M un tel point supposé dans le cercle C, je le joins à un point M' de la circonférence par une ligne ne rencontrant aucun point singulier, la distance d'un point de cette ligne à un point de E a un minimum non nul α; si $\varepsilon < \alpha$ il est impossible que M appartienne à l'une des aires δ. Soit alors $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs convergeant vers zéro. Prenons ε_1 et appelons δ_1 les domaines δ correspondants; par des lignes AB ne se coupant pas, je relie ces domaines à la circonférence C; un petit cercle de rayon $\varepsilon'_1 < \varepsilon_1$, dont le centre décrit AB balaie une aire δ'_1 ne contenant pas de point singulier, si ε'_1 est assez petit. Faisons de même glisser sur AB un cercle de rayon $2\varepsilon'_1$, nous obtiendrons ainsi les deux bords d'une coupure reliant à la circonférence C l'aire δ_1. On peut supposer que toutes ces coupures ne se rencontrent pas : désignons par D_1 le domaine d'un seul tenant extérieur aux δ_1 et aux δ'_1 et dans lequel $f(x)$ est régulière, ainsi que dans les domaines δ'_1. Je remplace ε_1 par ε_2, l'aire δ_1 donnera naissance à un certain nombre

(¹) PAINLEVÉ, *loc. cit.* — HELGE VON KOCH, *Acta mathematica*, 1902. — MITTAG-LEFFLER, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 11 avril 1904.

claires δ_2; en prolongeant AB et en introduisant de nouvelles coupures situées dans δ_1, on obtiendra un domaine D_2 analogue à D_1; on passera ainsi à D_3, etc. Je dis que tout point régulier M de $f(x)$ appartient, pour n assez grand, soit à D_n, soit à l'un des δ'_n; en effet, pour n assez grand, M n'appartient à aucun des δ_n; s'il appartient à une coupure AB, il est contenu dans un δ'_n; sinon, il n'y a dans son voisinage qu'un nombre fini de ces coupures : donc pour n assez grand, il appartient à D_n.

Soit $P_n(x)$ un polynome entier tel que le module de la différence $f(x) - P_n(x)$ soit inférieur à $\frac{1}{n}$ dans les domaines simples et séparés D_n et δ'_n. La suite $P_n(x)$ a pour somme $f(x)$ en tous les points réguliers (¹).

Supposons maintenant que le point à l'infini ne soit pas régulier pour $f(x)$ et que le domaine d'existence de cette fonction ne soit pas limité par une coupure fermée à distance finie, on remplacera le cercle C fixe par des cercles C_n de rayon n, qui limiteront les domaines D_n. Si le domaine est limité par une coupure fermée, on pourra remplacer le cercle C par une courbe quelconque de ce domaine aussi voisine de la coupure que l'on voudra.

Ainsi toute fonction analytique uniforme peut être représentée dans son domaine d'existence par une série de polynomes convergeant en tous les points réguliers vers la valeur de la fonction.

Remarque sur la région d'existence d'une fonction uniforme.

L'ensemble des points réguliers d'une fonction uniforme est d'un seul tenant et ne contient aucun point frontière; cet ensemble n'est soumis à aucune autre condition. M. Runge, dans un Mémoire

---

(¹) On peut d'ailleurs choisir les $P_n(x)$ de manière que la suite converge même aux points singuliers. Soit en effet δ''_n un domaine simple intérieur à δ_n et tel que la distance des deux frontières ne dépasse pas ε_n, et soit $\varphi(x)$ une fonction régulière dans δ_n que nous conserverons quand on remplacera δ_n par les δ_{n+1} qui y sont contenus, on peut choisir $P_n(x)$, de manière que la différence $f(x) - P_n(x)$ ait un module inférieur à $\frac{1}{n}$ dans D_n et les δ'_n et que la différence $\varphi(x) - P_n(x)$ ait, dans δ''_n, un module inférieur à $\frac{1}{n}$.

précédemment cité [1], a montré qu'on peut toujours construire une fonction uniforme admettant une région d'existence donnée, pourvu que cette région soit d'un seul tenant et ne contienne aucun point frontière.

Reprenons les domaines D_n déjà utilisés plusieurs fois [2] et soit $\varphi(x)$ une fonction dont les points singuliers situés dans la région D d'un seul tenant appartiennent à la frontière E de cette région. Nous avons vu qu'on peut construire une fraction rationnelle $r_n(x)$ qui, dans D_{n-1}, diffère de $\varphi(x)$ de moins de α en module, et à l'extérieur de D_n soit, en module, inférieure à α. On peut aussi construire une fraction $s_n(x)$ qui dans D_{n-1} diffère de $\varphi(x)$ de moins de α et, à l'extérieur de D_n, diffère de 1 de moins de α [3]. Les fractions obtenues ont leurs pôles à l'extérieur de D_{n-1} et à l'intérieur de D_n; on peut les joindre soit à la frontière E de D, soit à la frontière du carré de côté 2^{n+1} par des lignes ne traversant pas D_{n-1}; un cercle de rayon ε dont le centre décrit ces lignes va balayer des canaux, et aucun des petits carrés de côté $\frac{1}{2^{n+1}}$ ne sera contenu en entier dans un de ces canaux si ε est assez petit. Faisons glisser les pôles des fractions rationnelles à l'intérieur de ces canaux de manière à obtenir des fractions $R_n(x)$ et $S_n(x)$ dont les pôles sont sur E et qui vérifient les inégalités

$$|\varphi(x) - R_n(x)| < \alpha, \qquad |\varphi(x) - S_n(x)| < \alpha,$$

dans D_{n-1} et

$$|R_n(x)| < \alpha, \qquad |S_n(x) - 1| < \alpha,$$

à l'extérieur de D_n, sauf dans les canaux; ces dernières inégalités seront vérifiées en un point au moins de chaque petit carré de côté $\frac{1}{2^{n+1}}$ contenu dans D_{n+1} et extérieur à D_n [4].

---

(1) Page 56, en note.

(2) Page 58.

(3) Il suffit de déterminer la fraction $\sigma_n(x)$ qui dans D_{n-1} diffère de $\varphi(x) - 1$ de moins de α et à l'extérieur de D_n diffère de zéro de moins de α et de poser

$$s_n(x) = \sigma_n(x) + 1.$$

(4) Je désignerai par $D_{n+1} - D_n$ le domaine formé par les points intérieurs à D_{n+1} et extérieurs à D_n.

Soit maintenant $R(x)$ une fonction n'ayant pas d'autres points singuliers que certains points de E, par exemple une fraction rationnelle dont les pôles sont sur E et soit la série convergente

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p + \ldots$$

Je forme la fraction $R_1(x)$ qui, dans D_1, diffère de R de moins de α_1 et en certains points de chaque carré de côté $\frac{1}{2^3}$ de $D_2 - D_1$ a un module inférieur à α_1; je forme ensuite la fraction R_2, qui, dans D_3, diffère de R_1 de moins de α_2, et en certains points de chaque carré de côté $\frac{1}{2^5}$ de $D_4 - D_3$ diffère de 1 de moins de α_2, etc.; je forme R_{2p} qui, dans D_{4p-1}, diffère de R_{2p-1} de moins de α_{2p}, et en un point au moins de chaque carré de côté $\frac{1}{2^{4p+1}}$ contenu dans $D_{4p} - D_{4p-1}$ diffère de 1 de moins de α_{2p}; puis R_{2p+1}, qui, dans D_{4p+1}, diffère de R_{2p} de moins de α_{2p+1} et en des points de chaque carré de côté $\frac{1}{2^{4p+3}}$ de $D_{4p+2} - D_{4p+1}$ est en module inférieure à α_{2p+1} (¹). La série

$$R(x) + [R_1(x) - R(x)] + \ldots + [R_n(x) - R_{n-1}(x)] + \ldots$$

converge uniformément en tout point intérieur à D, car un tel point appartient à tous les D_n pour n assez grand et les termes de la série ont, pour n assez grand, des modules inférieurs aux nombres α_p. La somme $f(x)$ de la série précédente est une fonction holomorphe dans D. Je dis que tous les points de E sont singuliers pour $f(x)$. Soit A l'un d'eux situé à distance finie, entourons-le d'un petit cercle γ (²); pour n assez grand, il y a dans ce cercle des points de D_n, soit A_n l'un d'eux: le segment A_nA traverse le domaine $D_{n+1} - D_n$ qui sépare E de D_n et, à partir d'une valeur de n assez grande, il y a des carrés de ce domaine, de côtés égaux à $\frac{1}{2^{n+1}}$, qui sont entièrement contenus dans γ; en un point quelconque x de chacun d'eux, on a

$$|f(x) - R_n(x)| < \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots = \varepsilon_n,$$

(¹) Les fractions $R_n(x)$ ont toutes leurs pôles sur E.

(²) Si A est à l'infini, on tracera un cercle γ de très grand rayon.

car $R_n(x)$ est la somme des n premiers termes de la série des fractions rationnelles. Si $n = 2p$,

$$|f(x) - R_{2p}(x)| < \varepsilon_{2p}, \qquad |R_{2p}(x)| < \alpha_{2p},$$

en un point x au moins de chaque carré; donc, en ce point,

$$|f(x)| < \varepsilon_{2p} + \alpha_{2p}.$$

$f(x)$ prend dans le voisinage de A des valeurs aussi voisines de zéro qu'on le veut, car $\varepsilon_{2p} + \alpha_{2p}$ a pour limite zéro avec $\frac{1}{p}$. Si $n = 2p + 1$,

$$|f(x) - R_{2p+1}(x)| < \varepsilon_{2p+1}, \qquad |R_{2p+1}(x) - 1| < \alpha_{2p+1},$$

en un point x au moins de chaque carré, on a donc

$$|f(x) - 1| < \varepsilon_{2p+1} + \alpha_{2p+1}$$

et $f(x)$ prend dans le voisinage de A des valeurs différant aussi peu qu'on le veut de l'unité; la fonction $f(x)$ est discontinue en A, donc en chaque point de E.

Une conséquence de la proposition qui précède est l'existence d'une fonction analytique uniforme possédant les points d'un ensemble isolé quelconque comme points singuliers avec des parties principales données. Soit, en effet, D la région formée par les points du plan qu'on peut joindre à ceux de E, sans rencontrer de point appartenant au dérivé E′ de E, et supposons, ce qui ne restreint pas la généralité du résultat, que D ne contienne pas le point à l'infini. La frontière de D est formée par E′. Le domaine D_n ne contient qu'un nombre fini de points de E, puisqu'il ne contient aucun point de E′, car D_n est dans D. Soit $g_n(x)$ la somme des parties principales relatives aux points singuliers, en nombre fini, du domaine $D_{n+1} - D_n$; je forme une fraction $r_n(x)$ telle qu'on ait dans D_n

$$|g_n(x) - r_n(x)| < \alpha_n$$

et dont les pôles sont des points de E′, ce qui est possible, puisque $g_n(x)$ est régulière dans D_n (α_n a la même signification que précédemment). La série

$$(g_1 - r_1) + (g_2 - r_2) + \ldots + (g_n - r_n) + \ldots$$

converge uniformément autour de chaque point de D qui n'appartient pas à E; en effet, pour n assez grand, ce point appartient à D_n, et les termes de la série ont, à partir d'un certain rang, leurs modules inférieurs aux termes de la série α_n. La somme de la série est une fonction $g(x)$ régulière dans D, sauf aux points E; chaque point de E est singulier pour un terme unique de la série, avec la partie principale donnée; ce point est donc singulier pour $g(x)$ et la partie principale est la même.

Supposons que les points E soient à l'intérieur d'une région d'un seul tenant D et que les points E' soient tous sur la frontière de D; la fonction

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

admet les points de E comme points singuliers avec des parties principales données, car $f(x)$ est régulière dans D; d'autre part, la frontière de D est une coupure de $F(x)$; en effet, chaque point de la frontière de D est singulier pour $f(x)$; si ce point est un point de E', il est singulier pour F comme limite des points singuliers de E; s'il n'appartient pas à E', il est régulier pour $g(x)$ et singulier pour $f(x)$, donc singulier pour $F(x)$.

CHAPITRE V.

LES SÉRIES CONVERGENTES DE POLYNOMES.

Les régions de convergence uniforme.

Considérons d'abord une série de fonctions analytiques, convergente dans un domaine D simplement connexe où chacune d'elles est régulière : on peut, sans changer la somme de la série, remplacer chaque terme par un polynome. En effet, soient

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

les sommes des $1, 2, \ldots, n, \ldots$ termes de la série ; $F(x)$, leur limite ; $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, une suite infinie de contours fermés ayant pour limite le contour C de D ; on peut trouver un polynome $P_n(x)$ qui, dans le domaine D_n limité par le contour C_n, diffère de $f_n(x)$ de moins de $\frac{1}{n}$. La suite des polynomes $P_n(x)$ a même limite que la suite $f_n(x)$ en tout point intérieur à D, car ce point appartient à tous les D_n lorsque n est assez grand et la différence $P_n(x) - f_n(x)$ a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment. $F(x)$ est la somme de la série des polynomes

$$P_1(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)].$$

Le raisonnement s'étend immédiatement au cas où le domaine D est formé de plusieurs parties séparées.

Dans la suite, nous supposerons indifféremment qu'il s'agit d'une série de polynomes ou d'une série de fonctions holomorphes.

Soit $F(x)$ la somme d'une telle série, ou si l'on veut la limite d'une suite de fonctions holomorphes : *dans tout domaine, on peut en trouver un autre où cette fonction* $F(x)$ *est holomorphe et où la suite qui a pour limite* $F(x)$ *converge uniformément* [1].

[1] *Cf.* OSGOOD, *Annals of Mathematics*, 2e série, t. III, n° 1.

Je démontrerai d'abord que, dans tout domaine D_1 où la suite converge, on peut en trouver un autre dans lequel toutes les fonctions $f_n(x)$ de la suite sont bornées dans leur ensemble. Soit D_1 un domaine intérieur au domaine de convergence D de la suite; si, dans le domaine D_1, les modules des f_n sont inférieurs à 1, le théorème est démontré; sinon, il existe une fonction f_{n_1} qui, en un point de D_1, vérifie l'inégalité

$$|f_{n_1}| > 1;$$

comme f_{n_1} est continue, cette inégalité sera vérifiée dans un domaine Δ_1 intérieur à D_1. Considérons la suite

$$f_{n_1+1}, \quad f_{n_1+2}, \quad \ldots, \quad f_{n_1+k}, \quad \ldots$$

Si les modules de ces fonctions sont inférieurs à 2 dans Δ_1, le théorème en résulte; sinon, on peut trouver un domaine Δ_2 intérieur à Δ_1 dans lequel on aura, pour une fonction $f_{n_2} (n_2 > n_1)$,

$$|f_{n_2}| > 2,$$

etc.; en continuant ainsi on arrive à un domaine Δ_{p-1}; si les fonctions $f_{n_{p-1}} + k$ n'ont pas tous leurs modules inférieurs à p dans ce domaine, on trouvera une fonction $f_{n_p} (n_p > n_{p-1})$ et un domaine Δ_p contenu dans Δ_{p-1}, pour lequel

$$|f_{n_p}| > p.$$

On doit nécessairement aboutir ainsi à un domaine Δ_r dans lequel toutes les fonctions f_{n_r+k} ont leurs modules inférieurs à r, car, dans le cas contraire, on définirait une suite infinie de domaines

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_p, \quad \ldots$$

emboîtés chacun dans le précédent et ayant, par suite, au moins un point commun P. En ce point on aurait

$$|f_{n_1}| > 1, \qquad |f_{n_2}| > 2, \qquad \ldots, \qquad |f_{n_p}| > p, \qquad \ldots;$$

par conséquent, f_n n'aurait pas, au point P, une limite finie F [1].

---

[1] Cette démonstration est indépendante du nombre des variables dont dépendent les f; on peut simplement supposer que, pour chaque point, la plus grande des limites des $|f_n|$ est finie; on peut aussi remplacer le domaine D par un ensemble parfait quelconque, composé de points intérieurs à D. Les domaines Δ_p sont alors remplacés par des ensembles fermés dont chacun contient tous les suivants.

Appliquons ce théorème. Soit donc D_1 un domaine contenu dans D : dans D_1 se trouve un domaine Δ où les $|f_n|$ sont bornés dans leur ensemble ; donc dans Δ la suite f_n converge uniformément [1] et la limite $F(x)$ est holomorphe. C'est la proposition énoncée.

Voici un exemple : soit OABC un carré D limité par les axes $O\xi$, $O\eta$ et les droites $\xi = 1$, $\eta = 1$; menons des segments parallèles à $O\xi$, aux distances $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \cdots$; je vais définir une série de polynomes, convergeant dans le carré et qui, dans le rectangle R limité par les droites $\xi = 0$, $\xi = 1$ et $\eta = \frac{1}{n}$, $\eta = \frac{1}{n+1}$, aura pour somme une fonction holomorphe arbitraire $F_n(x)$. Menons les droites $\eta = \pm\frac{1}{n}$ qui limitent, avec les droites $OB\eta$ et AC prolongées au-dessous de $O\xi$, un rectangle R_0^n. A l'extérieur de ce rectangle se trouvent les segments d'ordonnées $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n-1}$; soit un de ces segments d'ordonnée $\frac{1}{\lambda}$ et menons, à la distance $\frac{1}{2n^2}$, les deux segments égaux et parallèles qui, avec les droites OA et BC, limiteront le rectangle R_λ^n. De même, les segments d'ordonnées $\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{n^2}$ définissent avec OA et BC un rectangle R'^n_λ. Soit maintenant $F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ une suite de fonctions, telles que $F_n(x)$ soit régulière dans R_n ; soient encore les polynomes quelconques $Q_0(\xi), Q_1(\xi), \ldots, Q_n(\xi), \ldots$. Il existe un polynome $P_n(x)$ qui, dans les rectangles

$$R_0^n, \quad R_1^n, \quad \ldots, \quad R_{n-1}^n,$$

diffère en module de moins de $\frac{1}{n}$, respectivement des polynomes

$$Q_0(x), \quad Q_1(x), \quad \ldots, \quad Q_{n-1}(x),$$

et qui, dans les rectangles

$$R'^n_1, \quad R'^n_2, \quad \ldots, \quad R'^n_{n-1},$$

diffère en module de moins de $\frac{1}{n}$, respectivement des fonctions

$$F_1(x), \quad F_2(x), \quad \ldots, \quad F_{n-1}(x).$$

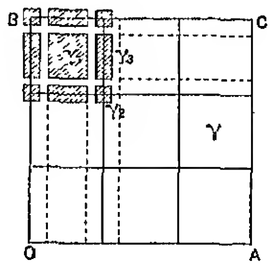
---

[1] *Voir* page 30.

Lorsque n croît indéfiniment, on voit que la suite des polynomes $P_n(x)$ converge en tous les points du carré : la limite $F(x)$ est égale à $F_p(x)$ à l'intérieur du rectangle R_p et à $Q_p(\xi)$, sur le segment d'ordonnée $\frac{1}{p}$, quel que soit l'entier p. On obtient ainsi une série de polynomes qui représente, dans une infinité de domaines contigus, une infinité de fonctions analytiques arbitrairement choisies et qui converge dans le domaine formé par la réunion de tous ces domaines partiels.

Donnons maintenant un autre exemple, qui va nous conduire à un résultat important dû à M. Lebesgue. Reprenons le carré

Fig. 4



OABC (*fig.* 4) et partageons-le en p^2 carrés égaux γ, de côtés $\frac{1}{p} = \alpha$, par des droites parallèles aux côtés.

Construisons les carrés γ_1 concentriques aux carrés γ et dont les côtés, parallèles aux axes, sont égaux à $\alpha - \frac{\alpha}{n}$; les carrés γ_2 ayant leurs centres aux sommets des carrés γ et les côtés parallèles aux axes et égaux à $\alpha - \frac{\alpha}{2n}$; les rectangles γ_3, dont les centres sont les milieux des côtés des carrés γ et les côtés sont respectivement égaux à $\alpha - \frac{\alpha}{n}$ et $\frac{\alpha}{2n}$ $\left(\text{le côté de longueur } \alpha - \frac{\alpha}{n} \text{ est parallèle au côté de } \gamma \text{ dont le milieu est le centre de } \gamma_3\right)$. Tout point D est contenu pour n assez grand dans un des domaines γ_1, γ_2 ou γ_3. Faisons correspondre p^2 constantes quelconques aux p^2 carrés γ. Il existe un polynome $P_n(x)$ qui diffère de moins de $\frac{1}{n}$, en module de la valeur constante correspondant au carré γ : 1° dans le carré γ_1 que contient γ; 2° dans le carré γ_2 dont le centre est le sommet de γ qui a les plus petites coordonnées; 3° dans les deux rectangles γ_3 situés sur les côtés de γ se coupant en ce

sommet (pour les carrés γ adjacents à AC et à BC, on ajoutera les deux rectangles γ_3 et les carrés γ_2 dont les centres sont sur ces droites et pour les carrés γ_2 qui empiètent sur deux carrés γ, on les attribuera au carré γ supérieur ou au carré γ de gauche). La suite des polynomes $P_n(x)$ a pour limite une fonction $f_p(x)$ qui est constante à l'intérieur et sur les côtés de chaque carré γ.

Soit alors une fonction continue F de l'ensemble des deux variables réelles ξ et η dans le carré D. On peut diviser le carré D en un nombre p assez grand de carrés γ pour que l'oscillation de F dans chaque carré γ ne dépasse pas $\frac{1}{q}$; soit $f_q(x)$, où $x = \xi + i\eta$, une fonction constante dans chaque carré γ et égale dans ce carré à la valeur de F en un point de γ [1]. On aura en tout point de D

$$|F(\xi, \eta) - f_p(x)| < \frac{1}{q}.$$

Nous définirons ainsi une suite de fonctions

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_q(x), \quad \ldots,$$

qui, dans le carré D, a pour limite F. D'après ce qui précède, chaque terme de cette suite peut être représenté par une série de polynomes en x. La fonction $F(\xi, \eta)$ est donc la somme d'une série uniformément convergente de fonctions dont chacune est la somme d'une série de polynomes convergente, mais non uniformément convergente [2]. Ainsi *toute fonction continue est égale à la somme d'une série double de polynomes en x* [3]. Il importe de remarquer que cette série double ne peut pas, en général, être transformée en série simple; on doit d'abord faire la somme des polynomes en nombre infini relatifs à $[f_{q+1}(x) - f_q(x)]$, puis faire la somme de ces dernières fonctions.

---

(1) Pour les carrés γ non adjacents à AC et BC, $f_q(x)$ a la même valeur dans chaque carré γ et sur les deux côtés de ce carré dont l'abscisse ou l'ordonnée sont les moindres; pour les carrés γ adjacents à AC, la fonction aura en outre la même valeur sur le côté de γ situé sur AC, sauf au sommet de plus grandes coordonnées; pour les carrés γ adjacents à BC, la fonction aura la même valeur sur les côtés situés sur BC, les sommets de plus grandes coordonnées exceptés; pour le carré γ de sommet C, la fonction sera constante dans ce carré, contour compris.

(2) Sinon F serait analytique.

(3) LEBESGUE, *Sur la représentation analytique des fonctions continues* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVII, 1903, p. 82).

Cas où la somme de la série est analytique.

Un problème important est celui de déterminer dans quelles conditions une série convergente de polynomes a pour somme une fonction analytique. Nous savons qu'il en est ainsi lorsque la convergence est uniforme et nous avons vu qu'une condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme est que la somme des n premiers termes de la série ait, quel que soit n, un module inférieur à un nombre fixe. Mais la somme d'une série de polynomes peut représenter une fonction analytique sans que la convergence soit uniforme [1]. Voici un exemple de ce cas : menons dans le carré OABC déjà utilisé, le segment EF parallèle à $O\xi$ d'ordonnée $\frac{1}{2}$, et le segment parallèle à $O\xi$ d'ordonnée $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$; menons à ce dernier segment deux segments parallèles à la distance $\frac{1}{2n^2}$ qui limiteront avec OB et AC un rectangle r_n; de même les deux parallèles à la distance $\frac{1}{n^2}$ nous définiront deux rectangles r_n^0 et r_n^1, le premier ayant ses côtés sur les droites OB et AC d'une part, $O\xi$ et la parallèle à $O\xi$ d'ordonnée $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$ d'autre part; le second ayant deux de ses côtés sur OB et AC, et les deux autres étant les segments parallèles à $O\xi$ d'ordonnées 1 et $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$. Soit $P_n(x)$ un polynome entier dont le module est inférieur à $\frac{1}{n}$ dans les rectangles r_n^0 et r_n^1 et qui diffère de l'unité de moins de $\frac{1}{n}$ en module, dans le rectangle r_n. La suite $P_n(x)$ converge vers zéro dans le carré D. Je dis que la convergence n'est pas uniforme en chaque point du segment EF. En effet, traçons un cercle γ, ayant pour centre un point P de ce segment et un rayon arbitrairement petit. Pour n assez grand, le rectangle r_n traverse ce cercle; il y a donc, à partir d'une certaine valeur de n, des points de γ où

$$|P_n(x)| > 1 - \frac{1}{n}.$$

[1] M. Runge en a donné le premier exemple Voir *Zur Theorie der analytischen Functionen* (*Acta mathematica*, t. VI, 1885, p. 245).

La convergence ne peut être uniforme dans γ, quelque petit que soit le rayon de ce cercle.

Une première condition à remplir pour que la somme d'une série de polynomes soit une fonction analytique est que cette somme soit une fonction continue de la variable x, c'est-à-dire que la convergence soit quasi-uniforme : soit $P_n(x)$ le terme général d'une suite de polynomes convergeant vers $f(x)$ dans un domaine fermé D ; nous dirons que la convergence est *quasi-uniforme* si, étant donnés ε positif arbitrairement petit et un nombre p aussi grand qu'on veut, on peut trouver un nombre p' supérieur à p tel que, pour chaque point x du domaine D, il existe un entier n_x compris entre p et p' pour lequel

$$|f(x) - P_{n_x}(x)| < \varepsilon.$$

Pour que la somme $f(x)$ soit continue, il faut et il suffit que la convergence soit quasi-uniforme, comme l'a montré M. Arzelà, qui a introduit la notion de ce mode de convergence (1).

La condition est nécessaire : en effet, soit x_0 un point de D; on a, dans un cercle de centre x_0 et de rayon ρ et pour n assez grand et fixe

$$\begin{aligned} |f(x_0) - P_n(x_0)| &< \varepsilon, \\ |f(x_0) - f(x)| &< \varepsilon, \\ |P_n(x_0) - P_n(x)| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

car, ε étant donné, on peut choisir le nombre n de manière à vérifier la première inégalité et déterminer ensuite ρ pour que les deux dernières soient satisfaites, ce qui est possible, puisque $f(x)$ et $P_n(x)$ sont continues. On a donc

$$|f(x) - P_n(x)| < 3\varepsilon.$$

Nous prendrons pour n un des nombres supérieurs à un nombre donné p, pour lesquels la première inégalité a lieu et pour ρ la plus grande valeur possible. Chaque point de D peut ainsi être entouré d'un cercle de rayon ρ ; il en résulte, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, qu'on peut couvrir le domaine D avec un nombre

(1) Arzelà, *Sulle serie di funzioni* (*Memorie della R. Accademia di Bologna*, 5e série, t. VIII, 1899). *Voir* aussi Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 41.

fini de ces cercles, soient D_1, D_2, ..., D_m, auxquels correspondent les nombres n_1, n_2, ..., n_m, tous supérieurs à p. Désignons par p' le plus grand de ces m nombres, on a, pour le point x,

$$|f(x) - P_{n_i}(x)| < 3\varepsilon, \qquad p < n_i \leqq p'$$

si le point x est dans le cercle D_i; la convergence est donc quasi-uniforme.

Supposons maintenant la convergence quasi-uniforme; donnons-nous un nombre ε; puisque la série converge en x_0, il existe un entier p à partir duquel on a

$$|f(x_0) - P_n(x_0)| < \varepsilon, \qquad (n > p).$$

La convergence étant quasi-uniforme, aux nombres ε et p, il correspond un nombre p' tel que, pour chaque point x de D, il existe un nombre n_x, compris entre p et p', pour lequel

$$|f(x) - P_{n_x}(x)| < \varepsilon.$$

Cette inégalité est vérifiée en x_0 pour le polynome P_{n_x}, puisque n_x est supérieur à p, on a donc

$$|f(x_0) - P_{n_x}(x_0)| < \varepsilon;$$

d'autre part, dans un cercle de centre x_0 et de rayon assez petit, on aura

$$|P_{n_x}(x) - P_{n_x}(x_0)| < \varepsilon,$$

puisque les fonctions continues $P_{n_x}(x)$ sont en nombre fini; il résulte des inégalités précédentes qu'on a, pour tout point x de ce cercle,

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon;$$

comme ε est arbitraire, $f(x)$ est continue en x_0 et, par suite, dans tout le domaine D.

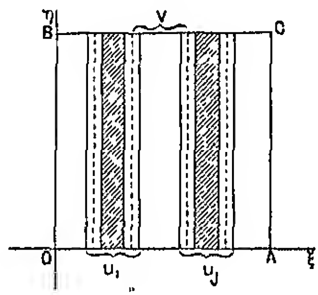
La condition pour $f(x)$ d'être continue suffit dans quelques cas pour affirmer que cette fonction est analytique; il en est ainsi lorsque la convergence étant partout quasi-uniforme, cesse d'être uniforme seulement autour des points d'une courbe γ rectifiable qui sépare le domaine D en un nombre fini de domaines partiels; la fonction $f(x)$ est alors continue dans D, elle est analytique, sauf peut-être sur la courbe γ; d'après un théorème de M. Pain-

levé [1], elle est holomorphe partout dans D. Le résultat est le même lorsque, au lieu de la courbe γ, on a un ensemble réductible de courbes analogues.

On pourrait penser que la condition, pour la somme d'une série de polynomes, d'être continue, suffit pour que, dans tous les cas, cette somme soit analytique. Nous montrerons, sur un exemple, qu'il n'en est rien et qu'une série de polynomes peut représenter dans un domaine D une fonction continue non analytique.

Soit le carré OABC (*fig.* 5) dont deux côtés de longueur égale

Fig. 5.



a l'unité sont sur $O\xi$ et $O\eta$, et une suite dénombrable d'intervalles

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

partout denses sur le segment OA et n'ayant, deux à deux, aucun point commun : l'ensemble des points qui ne sont pas à l'intérieur de ces intervalles est un ensemble parfait E. On peut, d'une infinité de manières, construire une fonction $\varphi(\xi)$ continue pour $0 \leqq \xi \leqq 1$, constante dans chaque intervalle u sans être constante sur tout le segment OA. Par exemple, si la mesure de l'ensemble E n'est pas nulle, on pourra prendre

$$\varphi(\xi) = \text{mesure de } E(\xi),$$

en désignant par $E(\xi)$ l'ensemble des points de E situés sur le segment (O, ξ).

[1] PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1888).

Construisons sur les n intervalles

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n,$$

comme bases, les n rectangles U_1, U_2, ..., U_n, de hauteur égale à l'unité. Il y a sur la figure deux rectangles U_i, U_j que je suppose voisins.

Menons à l'intérieur de chaque rectangle U des parallèles à $O\eta$ à la distance $\frac{1}{n}$ des côtés ; nous définissons ainsi des rectangles U′ qui sont couverts de hachures. Menons encore, toujours à l'intérieur de U, des parallèles à $O\eta$ à la distance $\frac{1}{2n}$ des côtés et considérons les rectangles V empiétant sur deux rectangles U voisins et dont les côtés, parallèles à $O\eta$, sont ces dernières parallèles : appelons $\varphi(u_i)$ la valeur constante de $\varphi(\xi)$ dans l'intervalle u_i, et $\varphi(V)$ une valeur de $\varphi(\xi)$ choisie parmi celles que prend cette fonction sur la base du rectangle V qui repose sur $O\xi$.

Il existe un polynome $P_n(x)$ qui, dans chaque rectangle U'_i, est égal à $\varphi(u_i)$ à $\frac{1}{n}$ près et dans chaque rectangle V est égal à $\varphi(V)$ à $\frac{1}{n}$ près. La suite des polynomes $P_n(x)$ ainsi définis a pour limite une fonction $f(x)$ qui est égale à $\varphi(\xi)$ en tous les points du carré dont l'abscisse est ξ ; en effet, si le point x est à l'intérieur d'un rectangle U, pour n assez grand il sera dans un rectangle U′ et $P_n(x)$ différera de $\varphi(\xi)$ de moins de $\frac{1}{n}$. Si le point x se projette en un point ξ de l'ensemble E, on peut prendre n assez grand pour que le rectangle V qui contient x empiète sur deux intervalles u_i, u_j, aussi voisins qu'on veut du point ξ et que, par conséquent, $\varphi(V)$ diffère de $\varphi(\xi)$ d'aussi peu qu'on veut. Comme $P_n(x)$ diffère de $\varphi(V)$ de moins de $\frac{1}{n}$, on voit qu'il a pour limite $\varphi(\xi)$.

La convergence quasi-uniforme apparaît donc comme une condition seulement nécessaire pour que la somme soit analytique. On ne connaît pas de condition à la fois nécessaire et suffisante, exprimant d'une manière simple que la limite d'une suite infinie de fonctions analytiques est une fonction analytique (1).

---

(1) *Cf.* P. MONTEL, *Sur les séries de fonctions analytiques* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXX, juin 1906).

Les points irréguliers.

Soit P un point quelconque du domaine D dans lequel une suite de polynomes $P_n(x)$ converge vers la fonction $f(x)$. Je dirai que le point P est un point de convergence régulière pour la suite, ou plus brièvement un *point régulier*, si, dans un cercle de rayon assez petit et de centre P, la suite $P_n(x)$ converge uniformément. Dans le cas contraire, le point P sera dit un *point irrégulier*. Soit E l'ensemble des points irréguliers dans le domaine D; il résulte du théorème établi au début de ce Chapitre que cet ensemble est non dense dans D. Je dis que c'est un ensemble parfait.

D'abord, c'est un ensemble fermé; en effet, tout point P, limite de points irréguliers, est un point irrégulier, car, dans un petit cercle décrit autour d'un point régulier comme centre, tous les points sont réguliers. En outre, l'ensemble E n'a pas de points isolés. Soit, en effet, un point P, supposé irrégulier et isolé; je peux décrire une circonférence γ de centre P et de rayon assez petit pour que tous les points de cette circonférence soient réguliers.

Soit A l'un d'eux; dans un cercle E de centre A et de rayon ρ, la série converge uniformément; je prends pour ρ la plus grande valeur possible. A chaque point A de la circonférence γ correspond un nombre ρ non nul; il résulte du théorème Borel-Lebesgue qu'on peut recouvrir cette circonférence à l'aide d'un nombre fini p de cercles c. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ces cercles. On peut trouver n_i tel que dans c_i, on ait

$$(1) \qquad |f - P_n| < \varepsilon$$

pour $n > n_i$; soit n' le plus grand des entiers n_i; pour $n > n'$, l'inégalité (1) sera vérifiée dans chaque cercle c_i et, par conséquent, en tous les points de γ. Donc les fonctions P_n convergent uniformément sur γ; elles convergent donc uniformément dans ce cercle et, par suite, le point P ne peut être irrégulier.

Je dis maintenant que cet ensemble E est continu et d'un seul tenant avec la frontière C du domaine D.

Supposons d'abord que l'ensemble E soit discontinu au point P; nous savons qu'on peut entourer ce point d'une courbe fermée γ

dont aucun point n'appartient à E; en reprenant le raisonnement qui vient d'être fait pour le cas d'une circonférence, on démontrera que la suite converge uniformément sur la courbe γ et par suite à l'intérieur, ce qui contredit l'hypothèse que P est irrégulier. De même, E est d'un seul tenant avec la frontière C, sinon on entourerait E d'une courbe fermée γ dont aucun point n'appartient à E ni à C, et à l'aide de laquelle on répèterait le même raisonnement. En résumé, *étant donnée une série de polynomes, convergente dans un domaine* D, *l'ensemble des points irréguliers est parfait, non dense dans* D, *continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine.*

Quelle est la nature de la fonction $f(x)$ définie sur l'ensemble E des points irréguliers : je dis qu'elle est ponctuellement discontinue sur E ou sur tout ensemble parfait extrait de E; il faut entendre par là que, dans toute partie de E, il y a des points de cet ensemble en lesquels la fonction est continue sur l'ensemble [1].

Démontrons d'une manière générale qu'une suite convergente de fonctions continues $f_n(x)$ a pour limite une fonction $f(x)$ ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Je dis d'abord que, dans tout domaine D_1, intérieur au domaine de convergence D, on peut en trouver un autre pour lequel

$$|f-f_n| \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad n>p,$$

ε étant un nombre positif donné.

D'abord, comme nous avons vu, dans tout domaine, il en existe un autre où les $|f_n|$ sont bornés; nous supposerons donc qu'il en est ainsi dans D_1. Donnons-nous ε, si l'on peut trouver un nombre p tel que, dans D_1, pour n et n' supérieur à p, on ait

$$|f_{n'}-f_n| < \varepsilon, \tag{2}$$

le théorème est démontré, car il suffit de faire croître n' indéfiniment pour obtenir en chaque point de D_1 l'inégalité

$$|f-f_n| \leqq \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, il existe un point P dans D_1 et deux

---

[1] *Voir* BAIRE, *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali de Matematica*, 1899).

nombres n_1 et n'_1 tels que, en P,

$$|f_{n_1} - f_{n'_1}| > \varepsilon \qquad (n'_1 > n_1).$$

Les f_n étant continues, cette inégalité a lieu pour tous les points d'un domaine Δ_1 entourant P. Considérons dans Δ_1 la suite

$$f_{n'_1+1}, \quad f_{n'_1+2}, \quad \ldots, \quad f_n, \quad \ldots;$$

si, à partir d'un rang p, on a pour tous les points de Δ_1

$$|f_n - f_{n'}| < \varepsilon \qquad (n, n' > p),$$

le théorème est démontré, sinon il existe un domaine Δ_2 intérieur à Δ_1 et deux nombres n_2 et n'_2 $(n'_1 < n_2 < n'_2)$ tels que

$$|f_{n_2} - f_{n'_2}| > \varepsilon$$

dans Δ_2, etc. ; en continuant ainsi, on arrivera nécessairement à un domaine Δ_r, dans lequel l'inégalité (2) sera vérifiée; sinon, on définirait une suite infinie de domaines, chacun contenu dans le précédent, qui auraient, par suite, au moins un point commun ω. En ce point ω, on aurait les inégalités

$$\begin{gathered} |f_{n_1} - f_{n'_1}| > \varepsilon, \\ |f_{n_2} - f_{n'_2}| > \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |f_{n_r} - f_{n'_r}| > \varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

les nombres n_r, n'_r croissant indéfiniment avec r. Mais ceci est impossible puisque la suite f_n étant convergente en ω, on a, en ce point, à partir d'un certain rang p,

$$|f_n - f_{n'}| < \varepsilon \qquad (n, n' > p).$$

Donc, dans le domaine D_1, on peut trouver un domaine D'_1 en tous les points duquel on ait, pour n assez grand,

$$|f - f_n| < \varepsilon.$$

La fonction f_n étant continue dans D'_1, on pourra trouver dans ce domaine un nouveau domaine D''_1 tel que, si f'_n et f_n sont deux valeurs de la fonction dans D''_1, on ait

$$|f'_n - f_n| < \varepsilon;$$

comme on a

$$|f' - f'_n| < \varepsilon,$$

f' étant la limite de f'_n, on en déduit dans D''_1

$$|f - f'| < 3\varepsilon.$$

Ceci posé, dans D_1 je peux donc trouver un domaine D' dans lequel l'oscillation de $f(x)$ c'est-à-dire le maximum du module de $f - f'$ ne dépasse pas 1 ; dans D' je peux trouver un domaine D'' où l'oscillation de f ne dépasse pas $\frac{1}{2}$, etc.; dans $D^{(n-1)}$, on peut trouver un domaine $D^{(n)}$ où l'oscillation de f ne dépasse pas $\frac{1}{n}$. On forme ainsi une suite dénombrable de domaines

$$D', \quad D'', \quad \ldots, \quad D^{(n)}, \quad \ldots,$$

dont chacun est compris dans le précédent et qui ont au moins un point limite P. Au point P, la fonction f est continue, car, étant donné le nombre α, à l'intérieur d'un cercle de centre P et tout entier dans $D^{(n)}$ $\left(n > \frac{1}{\alpha}\right)$, on aura

$$|f - f'| < \alpha,$$

f et f' étant les valeurs de la fonction au point P et en un autre point quelconque du cercle. La fonction f possède dans tout domaine D_1 des points de continuité, elle est ponctuellement discontinue dans D.

Dans la démonstration précédente, on peut remplacer le domaine D_1 par un ensemble parfait quelconque, tous les résultats subsistent. Donc la fonction f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait (¹).

En particulier, *la somme d'une série de polynomes est ponctuellement discontinue sur l'ensemble parfait des points irréguliers.*

Voici un exemple : reprenons les calculs de la page 110. Au lieu des polynomes $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ que nous avons introduits alors, nous prendrons les polynomes

$$Q_0^n(\xi), \quad Q_1^n(\xi), \quad \ldots, \quad Q_{n-1}^n(\xi),$$

(¹) Le raisonnement est applicable à des fonctions de plusieurs variables

en désignant par

$$Q_p^1(\xi),\quad Q_p^2(\xi),\quad \ldots,\quad Q_p^n(\xi),\quad \ldots,$$

une suite de polynomes convergeant pour $0 \leqq \xi \leqq 1$ vers la fonction de première classe (¹) arbitrairement choisie $\varphi_p(\xi)$. Les polynomes $P_n(x)$ ont alors pour limite une fonction $f(x)$, égale dans le rectangle R_p à la fonction holomorphe F_p et sur le segment d'ordonnée $\frac{1}{p}$, à la fonction de première classe φ_p.

Les propriétés que nous venons d'établir pour la fonction $f(x)$ suffisent-elles pour que cette fonction soit représentable par une série de polynomes en x? En d'autres termes, une fonction de x, analytique dans un domaine D, sauf aux points d'un ensemble parfait non dense, continu et d'un seul tenant avec la frontière C de D, sur lequel elle est de première classe, est-elle égale à la somme d'une série de polynomes en x? Il semble que l'étendue et la structure de l'ensemble E doivent ici jouer un rôle et que les limites de polynomes en x ne soient pas caractérisées par les propriétés que nous avons dites.

Propriétés d'une suite de polynomes dans le voisinage des points irréguliers.

Soit x_0 un point régulier où $f(x)$ prend la valeur a; je dis que, *dans le voisinage de x_0, les équations*

$$P_n(x) = a$$

ont, à partir d'une certaine valeur de n, une racine et une seule (²).

Posons $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$; $f(x)$ est analytique dans un cercle γ de centre x_0, supposons ce cercle assez petit pour qu'il n'y ait aucune racine autre que x_0 de l'équation $f(x) = a$, dans le cercle et sur la circonférence. Pour n assez grand, on aura sur la

(¹) *Voir* BAIRE, *loc. cit.*, et, dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. BOREL, la Note de M. Lebesgue.

(²) Les résultats de ce paragraphe ne seraient pas changés si l'on remplaçait les P_n par des fonctions holomorphes quelconques.

circonférence de γ

$$\left|\frac{R_n(x)}{f(x)-a}\right| < 1,$$

car $R_n(x)$ converge uniformément vers zéro dans γ, et $|f(x)-a|$ a sur la circonférence un minimum non nul. Les équations

$$f(x) - a = 0$$

et

$$f(x) - a - R_n(x) = P_n(x) - a = 0$$

ont alors dans γ le même nombre de racines, c'est-à-dire une et une seule. Réciproquement, soit x_0 un point régulier dans le voisinage duquel les équations

$$P_n(x) = a$$

ont, dans leur ensemble, une infinité de racines; je dis que $f(x_0) = a$. En effet, pour n assez grand, on a dans un cercle γ

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

ε positif arbitraire ; pour une valeur x dans γ, $P_n(x) = a$; donc

$$|f(x) - a| < \varepsilon;$$

d'ailleurs, si γ est assez petit,

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon,$$

d'où

$$|f(x_0) - a| < 2\varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

Considérons alors l'équation

$$P_n(x) = a,$$

où a est un nombre quelconque, elle admet dans le domaine D un certain nombre de racines ; supposons qu'on ait marqué tous les points racines des équations obtenues en donnant à n toutes les valeurs entières et soit E_a l'ensemble dérivé de ces points racines (¹). Il résulte de ce qui précède que *tout point régulier appartient à un ensemble* E_a *et à un seul.* Par conséquent, si un point

(¹) Si un point est racine pour une infinité de valeurs de n, je le considère comme faisant partie de E_a.

appartient à la fois à E_a et à E_b, c'est un point irrégulier. Les points communs aux deux ensembles E_a et E_b, a et b étant deux nombres quelconques, font partie de l'ensemble E des points irréguliers.

D'ailleurs, *un point irrégulier appartient à tous les* E_a, *sauf un au plus*. En d'autres termes, *si les équations*

$$P_n(x) = a, \qquad P_n(x) = b$$

n'ont, dans leur ensemble, qu'un nombre fini de racines autour de x, *ce point est régulier*.

Nous nous appuierons pour démontrer cette proposition sur une généralisation des théorèmes de M. Picard sur les points essentiels due à M. Landau [1] : si $f(x)$ est homolorphe dans un cercle de centre x_0, où elle ne prend ni la valeur zéro, ni la valeur 1, le module de cette fonction reste, dans un cercle fixe quelconque intérieur au premier, inférieur à un nombre M qui ne dépend que de la valeur $f(x_0)$. D'ailleurs, si $|f(x_0)| > \alpha$ et $|f(x_0) - 1| > \alpha$, on peut prendre pour M un nombre qui ne dépend que de α ; par conséquent, si l'on a une famille de fonctions $f(x)$, prenant en x_0 des valeurs dont aucune valeur limite n'est 0 ni 1, les modules de ces fonctions restent bornés, dans leur ensemble, dans le cercle précédent.

Reprenons les polynomes $P_n(x)$, on peut toujours supposer $a = 0$ et $b = 1$, sinon on remplacerait P_n par le polynome $\frac{P_n - a}{b - a}$. Traçons un cercle γ de centre x_0 et de rayon ρ dans lequel les équations

$$P_n = 0, \qquad P_n = 1$$

n'auront pas de racine et soit γ' le cercle de rayon $\frac{\rho}{2}$ concentrique à γ. Il existe certainement dans γ' un point où $f(x)$ diffère de zéro et de 1, car dans le cas contraire il y aurait dans γ' un point régulier où $f(x)$ serait égale à zéro, par exemple, et par conséquent les équations $P_n = 0$ auraient des racines autour de ce point. Soit x_1 un point tel que $f(x_1) \neq 0$, $f(x_1) \neq 1$. Traçons le cercle γ_1 de centre x_1 et tangent intérieurement à γ, ce cercle contient x_0 ; on aura pour

[1] E. Landau, *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1906, p. 267).

n assez grand

$$|P_n(x_1)| > \alpha, \qquad |P_n(x_1) - 1| > \alpha,$$

donc, dans un cercle quelconque γ'_1, concentrique à γ_1, les $|P_n(x)|$ sont bornés; menons γ'_1 assez voisin de γ_1 pour qu'il contienne x_0, alors on voit que les modules des $P_n(x)$ étant bornés autour de x_0, la convergence est uniforme dans γ'_1 et le point x_0 est régulier.

On peut démontrer un résultat plus complet que le précédent : *si dans le voisinage de x_0, les équations*

$$P_n(x) = a, \tag{2}$$

$$P_n(x) = b \tag{3}$$

ont un nombre de racines qui ne croît pas indéfiniment avec n, le point x_0 est régulier.

Soient, en effet, p le nombre maximum des racines de l'équation $P_n(x) = a$, dans un cercle γ de centre x_0, lorsque n varie; q le nombre correspondant pour l'équation $P_n(x) = b$. Ou bien, pour tout cercle γ' concentrique et intérieur à γ, les équations (2) ont, à partir d'un certain rang, toutes leurs racines dans γ' ou il existe un cercle γ' tel qu'une infinité d'équations (2) aient $p - 1$ racines au plus dans ce cercle; il en est de même pour l'équation (3) en remplaçant p par q. Supposons que la première hypothèse soit réalisée pour (2) et (3) alors, dans l'anneau limité par γ et un cercle γ', les équations (2) et (3) n'ont plus de racines pour n assez grand; on en déduit que la suite converge uniformément en chaque point de cet anneau et, à l'aide d'un raisonnement plusieurs fois utilisé, qu'elle converge dans γ uniformément : x_0 ne peut donc être irrégulier. Supposons maintenant que la seconde hypothèse se réalise pour (2); alors, nous extrairons de la suite P_n une suite partielle Q_n telle que les équations

$$Q_n(x) = a \tag{2'}$$

aient $p - 1$ racines au plus dans γ'; ou bien quel que soit le cercle γ'' concentrique et intérieur à γ', les équations (2)' ont toutes leurs racines dans ce cercle à partir d'un certain rang, ou bien il existe un cercle γ'' dans lequel une infinité d'équations (2)' ont $p - 2$ racines au plus; on extraira alors des Q_n une suite R_n, et en continuant ainsi on arrive nécessairement à un cercle γ_k et à une suite S_n telle que, quel que soit le cercle γ'_k concentrique et inté-

rieur à γ_k, toutes les racines des équations $S_n(x) = a$ sont à l'intérieur de ce cercle pour n assez grand. Considérons alors les équations $S_n(x) = b$; en raisonnant de la même manière, on arrivera à un cercle γ_0 et à une suite U_n, extraite des S_n telle que toutes les racines des équations

$$U_n(x) = a, \qquad U_n(x) = b$$

soient pour n assez grand à l'intérieur d'un cercle quelconque intérieur et concentrique à γ_0. En répétant le raisonnement fait tout à l'heure, on en déduit que la suite U_n converge uniformément en x_0. On voit donc que de la suite P_n comme de toute suite infinie extraite des P_n, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément en x_0; il en résulte que la suite P_n converge uniformément autour de x_0 : donc x_0 est régulier.

On démontrerait de même que si $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe en x_0, les équations

$$P_n(x) = \varphi(x)$$

ont, autour de x_0, un nombre de racines qui croît indéfiniment avec n, sauf peut-être pour une fonction φ exceptionnelle; il suffit de remplacer dans les raisonnements qui précèdent, à peine modifiés, P_n par la fonction

$$f_n = \frac{P_n - \psi_1}{P_n - \psi_2},$$

ψ_1 et ψ_2 étant deux fonctions supposées exceptionnelles; prenons en particulier $\varphi = P_k$, on voit que les équations

$$P_n(x) = P_k(x)$$

ont une infinité de racines autour de chaque point irrégulier; on peut donc considérer un tel point comme un point limite des points d'intersection des fonctions P_n entre elles [1].

---

[1] Cf. P. BOUTROUX, *Sur les fonctions limites des fonctions multiformes* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXIV, 2e sem., 1907) et P. MONTEL, *Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques* (*Comptes rendus*, novembre 1907).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

4198 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.